数学与科学史丛书

名誉主编　吴文俊

丛书主编　曲安京

中国历法与数学

⊙ 曲安京／著



科学出版社

www.sciencep.com

数学与科学史丛书

中国历法与数学

曲安京　著

国家自然科学基金
西北大学"211 工程"　支持项目

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书详细论述了中国古代历法中的常数系统与数学方法，阐述了“天文常数系统”的构成原理与意义。从数学的角度，深刻探析传统历法中蕴含之算法的真实意义，从而为揭示中国古代数理天文学的诸多谜团，给予逻辑上自洽的答案，并首次详述了太乙术数中的历法问题。

适用于文史工作者、科学史工作者、数学与天文学专业的大学生和教师等。

图书在版编目(CIP)数据

中国历法与数学/曲安京 著.—北京:科学出版社,2005
(数学与科学史丛书/ 曲安京主编)
ISBN 7-03-014467-8

I. 中… II. 曲… III. ①古历法-研究-中国②古典数学-研究-中国 IV. ①P194.3②O112

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 104799 号

责任编辑:孔国平 王剑虹 / 责任校对:李奕萱
责任印制:钱玉芬 / 封面设计:刘向东

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年4月第 一 版 开本:850×1168 1/32
2006年4月第二次印刷 印张:13 5/8
印数:2 001—3 500 字数:352 000

定价:32.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

总　序

中华民族正濒临伟大复兴的前夕,科学技术是第一生产力,科技力量的强大无疑是实现民族复兴的决定性关键因素。

中国科学技术源远流长,在历史上众多方面有无数重大贡献,决非仅仅是通过丝绸之路传至西方的所谓“四大发明”而已。

由于本人是数学工作者,试就中国古代对数学的贡献略志数语如下。

提起数学,我们通常会想到古希腊欧几里得逻辑推理的演绎体系与相应的定理证明。在它的影响下,形成了绚丽多彩的现代数学。古希腊对数学的这种影响与成就,自然是不可磨灭而应该为国人所向往与虚心学习的。

与欧几里得体系不同,中国古代的数学家重视实际问题的解决,由此自然导致多项式方程(组)的求解与相应算法的发现。对方程研究的不断深化,也逐步导致正负数、分数即有理数、(开方型)无理数,以及不尽小数即一般无理数的引入及其计算与极限等规律的发现。这在公元263年刘徽的《九章算术注》中即已完成。而在欧洲,则直至19世纪 Weierstrass 与 Cantor 等时代,才以繁复而不甚自然的形式实现了实数系统的完成,其中还出现过所谓的数学危机。

不仅如此,我国宋元时期天元概念的引入与天元术的创立,其成就之一是导致解多变量多项式方程组的一般思路与具体方法。上世纪70年代我国的数学家们正是由于研习中国古代数学的启发,建立了解多项式方程

组的一般方法，并由此创立了数学的机械化体系，取得从理论以至实际的多方面应用。特别是成功地应用于（初等与微分）几何定理的机器证明，为计算机时代脑力劳动的机械化开其先河。这不能不归功于中国古代数学所蕴含的思想与方法的深邃内容。

在科学、技术，以至医药、农牧业、地理与制图、水利、工程与机械制造等诸多方面，中国古代也有着辉煌的成就。试以天文学为例，我国是天文学发达最早的国家之一，早在新石器时代中期，我们的祖先已开始观天象，并用以定方位、定时间、定季节。我国历代都有历法，相传黄帝时代即已有之。不仅如此，历代还设置观察天文现象的专职官吏，传说颛顼时代就已有"火正"的官。

由于制历与天象观察都需要数学的帮助，因而中国古代数学的许多成就往往散见于历代的天文历法与有关著作之中。例如，有着悠久发展历史的招差术，主要见于历代的历法之中，在元代历法中实际上已有接近于微积分中麦克劳林级数的内容。

本丛书主编曲安京教授是天文学史方面有突出贡献的专家，中国古代天文成就的详情可参看丛书中曲安京所著已出版的《中国历法与数学》和即将出版的《中国数理天文学》。至于其他方面，可参阅李约瑟的《中国科学技术史》及国内出版介绍中国科学技术史的有关著作。

聊志数语，以贺本丛书在曲安京教授的精心策划之下，取得巨大的成功。

吴文俊

2005年12月22日

自　序

一年多以前，就打算使自己在中国古代数理天文学领域的探索，尽快地进入收官的阶段。既不是厌倦了，也不是无所事事，只是想尝试一些新的东西。迄今为止，我一直专心致志地驻守在这个领域，心无旁骛。作为一个阶段的总结，我想在本书的前面先剖白一下自己入道以来的心路历程，希望这些文字能够有助于师友们更好地理解我和我的一些想法。

1987年底，在李继闵与白尚恕先生的共同安排下，我到北京师范大学进修天文学与天文学史。那个时候我已是数学史专业二年级的硕士生了，但是对自己的专业前途仍然懵懂不清。

那一年的冬天，北京的大街上到处都流行着齐秦的“我是一匹来自北方的狼”，有时候一个人徜徉在夜幕下的校园里，耳边呼啸着凄厉的北风，联想到旷野中那匹茫然的狼，不免觉得前景有些惨淡。

但是，就在不远的地方，分明有一处辉煌的所在，那里聚集了太多精明的猎手，有些人在追逐新的目标，有些人在捕食受伤的猎物，还有些人在争夺那些已经死亡的牺牲品，大家都忙得不亦乐乎。

当时，我非常崇拜自己的老师，我尾随着他们发现的任何蛛丝马迹，似乎都已在他们的掌控之中。这个令人

沮丧的事实教我明白，我既不如他们机敏，也远没有他们强壮。如果加入他们的会战，顶多是参加了一场盛宴，但分到的不过是一杯残羹罢了。更加糟糕的是，我感觉，自己迟到了一步，高潮即将过去，猎物正在减少。有些人甚至已经开始打扫战场了。

我有些于心不甘。就像歌里的那匹无知而又野心勃勃的狼，“咬着冷冷的牙”，血液里却澎湃着一种年轻的、不可遏止的冲动。我并不害怕竞争，只是担心最终会一无所获。因此，只得远远地欣赏着老师们彼此间的竞争。那是一种短兵相接的混战，有些人不断地有所斩获，成为众人瞩目的明星，而更多的人跟我一样，只能够眼睁睁地作为他们的看客。

人与人为什么会有这样的不同？我原本以为这是先天的差距，后天是无可奈何的。

但是，一场企业家的演讲，改变了我的看法。那家企业有两名同龄的年轻人，一位对上司交待的任务从来不打折扣，中规中矩，无可挑剔；另一位喜欢翘着二郎腿看天花板，常常别出心裁。几年后，看天花板的成了公司的副总，而他的同事仍然在原地踏步。那位企业家解释道，天花板并没有什么特别之处，但是厉害的人，却能从中读出名堂来。

我于是恍然大悟：对于大部分猎手来说，缺乏的不是猎物，而是捕捉猎物的眼光。许多情况下，困难不在于如何征服，而在于如何发现。一个成功的猎手，可以发现隐蔽得很深的猎物；一个不成功者，即使猎物就在眼前，也

会视而不见。这就是差别。

这个道理,老师们是教给过我的。一代又一代成功的前辈们都向他们的学生传授过这样的经验。但是,真正体悟到这个道理的学生却并不是很多。庆幸的是,我觉悟到了这一点,还不算太晚。竞争,其实并不可怕;可怕的是,把竞争仅仅寄托于争夺并占有那些濒死的猎物,而不是去发现一些新的、鲜活的目标。

有了这个收获垫底,我想,也许有一天,我也会像前辈们一样出色,成为一个好的猎手,开辟一片虽然不大但是属于自己的园地。这就是17年前的那个冬天,我的梦想。

17年来,我一直按照这个目标经营着自己的梦想,始终没有放弃。我体会到了狩猎的快乐,并且乐此不疲。这些年来,偶尔也会受到一些专业的歧视、世俗的诱惑,有过挫折,甚至失败。但是一路走来,虽然艰辛,却从未感觉到痛苦和乏味。

我并不奢望自己有什么大的成就,也深知与那些令人景仰的前辈们的差距不可以道里计,但是,我却从不讳言学术研究带给自己的满足感。这种感觉令我的生活充实而快乐,同时又充满了危机感,因此,总是不断地提醒自己:下一步,我该做什么?

这些追问促使我不停地思考:为什么要研究科学史?谁需要科学史?科学史究竟是干什么的?

虽然我并不悲观,但也从不盲目乐观。作为一个职业的数学史家,数学史已然成为我生命的一部分,我希望

它兴旺发达。我试图从前辈们在这100年来的风风雨雨中走过的历程,寻找上述问题的答案,我把自己的思考写了下来,作为本书的第一章,请朋友们指正。

我觉得,一个有理想的学者,应该未雨绸缪,多一些忧患意识。道理很简单,如果没有了猎物,猎手就要下课。如果没有了问题,学科就会死亡。与此同时,经验又告诉我,找不到猎物,并不是猎物灭绝了,而是缺乏发现;提不出问题,也并不是问题没有了,同样是缺乏发现。因此,需要时刻保持清醒的问题意识,这样才能够延长自己的学术生命,甚至探索一些新的领域。

进入不惑之年以后,我盘算着出一本有关中国古代数理天文学的书,以便作为自己学术生涯的第一个阶段的总结,至少对于我来说,它们记录了一段有趣的历史。

原以为,有以前的论文作为毛坯,只需编辑加工一下就可以了。可是动手之后,便发现按照开始的想法,不仅书的结构会比较紊乱,内容也非常庞杂。所以,就决定花些功夫,仔细地整理一下,这样一来,原来设想中的那本书就被一分为二了。

这本《中国历法与数学》,全面阐述了中国古代天文常数系统的发现与应用,讨论并复原了传统数理天文学中之主要数学方法的构造原理,发掘了一批从未引起学术界注意的太乙术数中的历法。从本质上讲,历法不外乎天文常数的选择及各种推步算法的建立,因此,本书的内容主要是在探讨中国历法的构造机理及其数学思想。

就关注问题的角度与解决问题的方法而言,本书都

十分强烈地带有过去20多年中国数学史界所流行的色彩：既重视对新史料的发现，更重视对原始算法之数学思想的复原。这些内容，反映了一个成长于20世纪80年代末期的青年数学史家眼中的中国古代数理天文学的某些基本问题。

如果说现在这本书讨论的主要问题是中国古代历法中的常数与算法是如何选择与构造的，那么，正在撰写的第二部书稿，将会比较系统地阐述这些常数与算法是如何应用的。在那里，我们将仔细地讨论包括日月食与行星运动理论在内的中国古代数理天文学的具体内容与方法。这两本书作为姊妹篇，构成了同一主题的两个方面。

当然，感谢的话是永远不会忘记的。借用一个有点庸俗的比喻，如果幸福的第一个数字是1，那么老师的引导、朋友的帮助、家人的关怀、学生的期待、领导的扶持等就是它后面不断增加的0，缺少了它们，所有的快乐都会迅速贬值的。心存感激，等到第二本书完成的时候再一起说出来吧。

2004年盛夏的西安出奇的温和，让我可以静心地写完计划中的第一本书。在书稿完成的那一天，我问刚上初中的儿子，这本书取个什么名字好。儿子听了我的介绍后，不假思索地说：就叫《历法的奥秘》吧。他说，这样的书名，也许能够吸引小朋友来购买。我告诉他，自己并不在意有多少人会买这本书，甚至可以肯定，不会有多少读者读这本书。儿子问，那你写它的意义何在呢？

是啊，经常会有人问我类似的问题：你做的这些到底

有什么用呢？我总是心有戚戚地回答，没什么用。不过，看到对方狐疑的目光，有时候会接着说，如果你熟悉科学史，你就会明白，科学家很少是以有用为目的来从事他们的研究的，从某种意义上来说，科学的目的就是为了满足人类的好奇心。那么，对于一个数学史家来说，破解一些被岁月尘封的历史之谜，就是满足我自己最大的好奇心了。

给历史留下一份档案，这就是我的目的。

我想，这也是我们这套丛书的一点愿望吧。

曲安京

2004 年 10 月 13 日于英国剑桥李约瑟研究所

目　录

第一章　历史上的数学与数学的历史

中国科学史学科的创立者是李俨与钱宝琮,不过,他们两位的主要身份都是数学史家。因此,数学史是中国科学史学科中起步最早、发展最成熟的一个门类,它的兴衰,对于整个中国科学史界的发展都有着重大的影响。

20 世纪 70 年代之后,中国数学史的研究因吴文俊研究范式的提出而开创了一个新的纪元。那真是一个令人怀念的时代,笔者正是在这个时代的高潮中投身到数学史的领域,并在吴范式的指导下开始从事中国古代数理天文学的研究。如果不了解这个背景,就可能对本书中论述的许多内容与方法的理解产生障碍。

我们所要讲述的这个故事本身,从一个特定的角度,反映了几代中国数学史家在过去的 100 年中对数学史研究的奋斗历程。就数学史研究方法论而言,发生在中国的这种研究范式的明显转换,即使在世界数学史界也是没有先例的,因此,非常值得我们的珍视与总结。

第一节　中国数学史研究的两次运动

以现代科学知识为背景的数学史研究在中国起步于 20 世纪初。在 1949 年之前,中国数学史界基本上处于散兵游勇式的业余状态,没有专业的学术刊物,没有职业的数学史家,更没有专门的研究机构。20 世纪 50 年代之后,在中国科学院建立了以数学史为核心的科学史研究室,逐步形成了一支专业的学术队伍,并开始编辑发行科学史的学术杂志。特别是 1978 年以来,在中国多个高校陆续成立了数学史的研究中心,培养了一大批数学史的硕士与博士。

20世纪中国的数学史研究,经历了高潮—低谷—高潮—低谷波浪式的发展历程,其中的两次高潮形成了两次特点鲜明的运动。"发现"与"复原"是20世纪中国数学史研究的两次运动的主题,李俨(1892~1963)与钱宝琮(1892~1974)领导的第一次运动,以"发现"历史上有什么数学为特征,其高潮持续到20世纪60年代中叶;吴文俊在20世纪70年代末发起的第二次运动,将旧的研究范式转换为"复原"历史上的数学是如何做出来的,其高潮持续到20世纪末。

一、发现:第一次运动的主题

中国古代是否有数理科学?如果没有,为什么?如果有,有什么?这些问题在20世纪初为一大批接受了现代西方科学训练的中国学者所关注。正是这些问题,成为他们研究中国古代数学史的动力。毫无疑问,作为数学史学科在中国的两位共同的创始人,李俨与钱宝琮堪称是第一次运动的代表人物。他们所领导的这次运动的特点,就是去发现中国古代到底创造了什么样的数学。"发现",是李钱运动的特征,我们将通过两个与他们的研究有关的实例,来具体阐释"发现"一词在中国数学史研究中的含义。

1."发现"内插法

内插法是中国古代数理天文学中创造并使用的主要数值计算方法。公元6世纪中叶,北齐天文学家张子信发现太阳视运动与行星公转的不均匀性现象之后,历法家开始设计分段二次插值算法,来计算其中心差,也就是在任意给定时间内行星公转(或太阳视运动)的实际运行距离与平均运行距离的差值。这种算法最早出现在刘焯的《皇极历》(600)中。在唐代一行和尚(683~727)编制的《大衍历》(727)中,为了推算太阳视运动的中心差,构造了如下的二次函数

$$f(x) = \frac{x}{n_1} \times \Delta_1 + \left(1 - \frac{x}{n_1}\right) \times \frac{x}{2n_2} \times \Delta^2 \qquad (1\text{-}1)$$

其中，$0 \leqslant x < n_1$ 日，函数 $f(x)$ 表示在所求气第 x 日太阳视运动的中心差。二次差分为

$$\Delta^2 = \frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2}\left(\frac{\Delta_1}{n_1} - \frac{\Delta_2}{n_2}\right)$$

当一个回归年被划分为 24 气时，n_1 与 n_2 分别表示相邻两个气的长度。Δ_1 与 Δ_2 是两个常数，分别表示太阳在这两个气（n_1 与 n_2）的运动过程中，实际行度与平均行度的差值。

函数(1-1)就是著名的一行“不等间距二次插值公式”。假令式(1-1)中的 $n_1 = n_2 = n$，则公式中的二次差分化为

$$\Delta^2 = \Delta_1 - \Delta_2$$

由此得到的函数，即为刘焯在其《皇极历》中创立的“等间距二次插值公式”。显而易见，刘焯的公式是一行公式的一个特例。

刘焯与一行在各自的历法中构造并使用的插值函数，都是以文字的形式描述的，将这些算法以代数符号表现成函数(1-1)的形式，需要一定的转换。

函数(1-1)早已为明清两代的中国与日本的一些历算学家所知道，但是，首先将刘焯与一行的中心差算法与现代数学的内插法联系起来的，是日本科学史家薮内清（1906～2000）。在其以中国传统历法为专题而完成的博士论文中，薮内清指出，刘焯、一行的算法分别是“等间距二次内插法”与“不等间距二次内插法”。他通过将一行与刘焯的函数(1-1)转换成高斯的内插公式，而提出刘焯与一行的算法分别等价于高斯的等间距与不等间距二次内插法。[1]

在薮内清的“发现”10 多年之后，李俨出版了一部详细论述中国古代历算家之内插法的著作，在这部书中，李俨将一行与刘焯的函数(1-1)转换成了牛顿的内插公式，从而提出刘焯与一行的算法分别等价于牛顿的等间距与不等间距二次内插法。[2]

按照现代数学给内插法的定义,内插公式可以被表示成许多不同的形式,如 Lagrange 内插法、Aitken 内插法、Newton 内插法、Gauss 内插法、Stirling 内插法、Bessel 内插法,以及 Everett 内插法等。这些内插法的不同,区别在于其构造方法的差异。因此,假设我们选择的一组插值点是相同的,则不论以任何方式构造出来的插值函数,都是可以彼此相互转换的。不难验证,刘焯与一行的函数(1-1)是一个二次插值函数。因此,将它转化成高斯二次内插公式,或者牛顿二次内插公式的形式,一定是可以做到的。

这便是薮内清指出函数(1-1)等价于高斯公式,而李俨认为它等价于牛顿公式的原因。可实际上,按照内插法的定义,刘焯与一行的内插法,既不是高斯的,也不是牛顿的。薮内清与李俨所做的贡献是,他们"发现并揭示"了这样一个事实:中国古代历法家创立并使用了二次内插法。

将古代历法中的算法与现代数学中的公式联系起来,是薮内清与李俨的"发现"。这种"发现"是难能可贵的,因为,只有证实了函数(1-1)是一种二次内插公式,才算是真正"发现"了这个函数在中国古代数理天文学中的数学意义,从而揭示出刘焯与一行发明这个算法的数学价值。

但是,这种内插法到底是如何构造出来的这个问题却没有得到回答。

2."发现"重差术

重差术是中国古代数学家为了测望高、远、深处的目标而创设的方法。这个方法利用若干个表,由观测者在观测地通过这些固定的表,对目标进行测望,根据这些表影所读取的数据,带入相应的计算公式,以获得测算目标的距离与高下。由于这类计算公式中总是会出现若干个读取数据的差数,因此,被称为重差术。

在所有重差类的问题当中,最简单、也是最基本的一个公式,就是所谓的"日高术"。日高术,顾名思义,是古人用来测量太阳高度的。

日高公式最早记录在《周髀算经》(约公元前100年成书)。按照《周髀算经》的记述,在周朝的时候,天文学家们在正南北方向树立两个8尺高的表,用以测量正午时分观测地水平面上太阳的高度。

如图1-1所示,令HI表示太阳H的水平高度,AB与CD是观测地点正南北方向上直立的两支表。AE与CF分别表示表AB与CD的影长。假设已知两表的间距AC,则《周髀算经》中给出了如下的公式以计算太阳的高度

$$HI = AB + \frac{AB \times AC}{(CF - AE)} \tag{1-2}$$

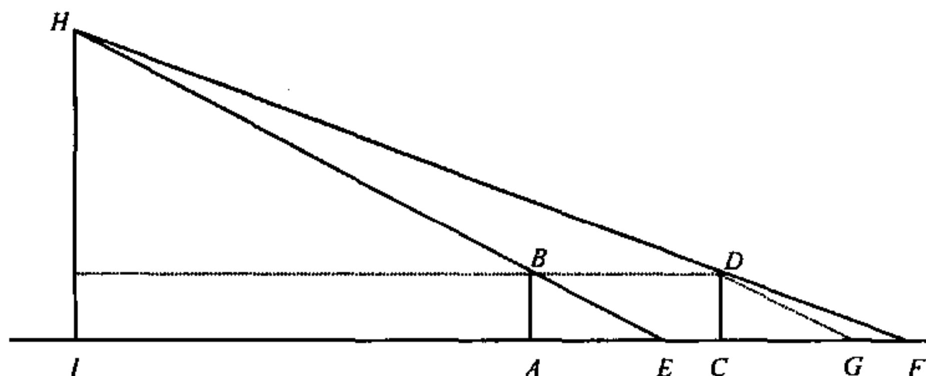


图1-1　日高图

公式(1-2)也被刘徽用来推算海岛的高度而记录在其《海岛算经》(263)第一个题目的算法中。《海岛算经》的其他问题的算法都比公式(1-2)要复杂,其中一些问题用到了四支表。根据唐代的《艺文志》,可以知道刘徽为了推导这些公式,曾经绘制了相应的图示,但是,这些东西至今早已失传。在现传《周髀算经》中,保存了一幅三国时赵爽为《周髀算经》作注时绘制的日高图,可惜的是,随着岁月的流逝,这幅图也已经面目全非了。

根据赵爽的"日高图注",人们不仅可以写出公式(1-2),而且可以知道他还利用了他的日高图来证明公式(1-2)。因此,明清以来,数学史家为了验证公式(1-2),提出了许多复原赵爽日高图的

方案。钱宝琮在校点《算经十书》时"依据赵爽注重绘"的日高图是一个典型的代表,他在图1-1中添加了一条与 HE 相平行的线段 DG。利用图1-1,人们可以很容易地验证公式(1-2)是正确的。[3]

钱宝琮的目的,主要在于说明日高公式(1-2)是重差测量理论中的一个基本的、有效的算法,换句话说,他的兴趣是通过他所"复原"的日高图(图1-1),以说明《周髀算经》的日高公式(1-2)是正确的。因此,他的"发现"是,"依据赵爽注重绘"的日高图1-1,可以非常简明地达到这个目的。这样的做法,在当时是不会产生任何异议的,因为,这是数学史家所"习以为常"的、普遍采用的研究方法。

对于这个简单的例子来说,当时的数学史家的主要目的在于"发现"某种方式,去证实公式(1-2)的正确性,因此,往往忽视了他们所"发现"的那种方式的历史真实性。这种不经意的"疏忽",导致了数学史研究中滥用现代数学概念与符号去解释古代数学成果的倾向。

正是在20世纪70年代后期,随着一位数学家从方法论上对这种研究方式提出尖锐的批评,从而吹响了中国数学史研究的第二次运动的号角。

二、复原:第二次运动的主题

李俨与钱宝琮运动的主题,就是"发现"历史上有什么数学,特别是发现中国古代创造了哪些数学。所谓数学史研究中的"发现",就是运用现代数学的概念与知识,对历史上的那些尚且不为人知或鲜为人知的历史文献中之数学意义的揭示、内容的解说、程序的复述,以及定理、公式、算法的正确性的验证。

在李钱运动时期,一篇原创性的数学史的"研究"论文,必定是有所"发现"的。或者"发现"刘焯与一行的函数(1-1)等价于高斯或牛顿的内插公式;或者"发现"《周髀算经》中的日高公式

(1-2)是正确的,诸如此类。

在20世纪70年代末,吴文俊提出了数学史研究的"古证复原"的思想,从而将中国数学史研究带入了一个崭新的阶段。吴文俊发起的这场运动的主题,是要将数学史研究从"发现"历史上有什么数学,扩展到"复原"这些数学是如何做出来的。虽然中国的数学史家在此之前,对他们所发现的历史上的数学成就的来龙去脉也要进行仔细的清理,但是,通常使用的方法是将这些成就与现代数学中相应的内容相比附或验证。

吴文俊通过对钱宝琮关于日高公式(1-2)的复原方案的批评,提出了他的新的数学史研究路线。吴文俊指出,由于中国传统数学中基本上不从线段的平行性出发来论证任何数学命题,因此,钱宝琮在图1-1中通过添加线段 *HE* 的平行线 *DG* 来证明公式(1-2)的做法是没有根据的,从数学史的角度来看,这个证明就是一个"错误"的证明,因为它不符合古人原始的证明思想。

在详细地分析和评述了历史上各种有关中国古代重差算法的研究工作之后,吴文俊指出:

> 我们所以不惜用大量篇幅列举海岛公式的后代各种证明,指出他们的不当之处,并且强调除个别如杨辉、李俨另当别论外,这些证明特别是滥用代数符号者都是"错误"的,乃是因为这些错误方法已经泛滥于绝大多数流行的数学史著作之中,致使古代数学的真实情况不仅淹没不彰,而且面目全非,许多巴比伦神话、印度神话以及丢番图神话之所以产生,这是主要的原因之一。[4]

吴文俊强调,用现代数学概念或方法去验证或说明古代数学的正确性的做法并不是数学史研究的目的,数学史家必须更加注重"复原"历史上的这些数学究竟是如何做出来的。为此,在"《海岛算经》古证探源"一文中,吴文俊明确提出:"要使古证复原,应该遵循以下三项原则":

> 原则之一,证明应符合当时本地区数学发展的实际情

况,而不能套用现代的或其他地区的数学成果与方法。

原则之二,证明应有史实史料上的依据,不能凭空臆造。

原则之三,证明应自然地导致所求证的结果或公式,而不应为了达到预知的结果以致出现不合情理的人为雕琢痕迹。[5]

正如吴文俊所言,李钱范式中的这种错误的数学史研究方法,并不仅仅出现在中国数学史家的论述中,它确实已经"泛滥于绝大多数流行的数学史著作之中"。因此,在1986年的国际数学家大会的邀请报告中,他将上述原则进一步简化为两条数学史研究所应当遵循的基本原则。[6]

吴文俊的"古证复原"的思想,开启了中国数学史研究的又一个高潮。李钱运动中所"发现"的大量成果,诸如函数(1-1)与公式(1-2),到底是如何构造出来的?成为吴运动的研究主题。[7]

那么,吴运动中的"复原"与李钱运动中的"发现"的实质性区别究竟在哪里呢?让我们以《周髀算经》中之弦图的"发现"与"复原"为例,做一个具体的说明。

三、弦图的"发现"与"复原"

弦图是用来证明勾股定理的。现存最古老的一幅弦图,见载于《周髀算经》,如图1-2所示,这幅弦图及其附录的文字"句股圆方图"都是三国时候的赵爽创作的。

在赵爽的弦图之前,《周髀算经》记录了如下一段文字:

故折矩,以为句广三、股修四、径隅五。既方之,外半其一矩,环而共盘。得成三、四、五。

这段文字共三句话,第一句,可以视为勾股定理的一个特例的陈述。第二句,是一个"证明"的程序。第三句,是结论。

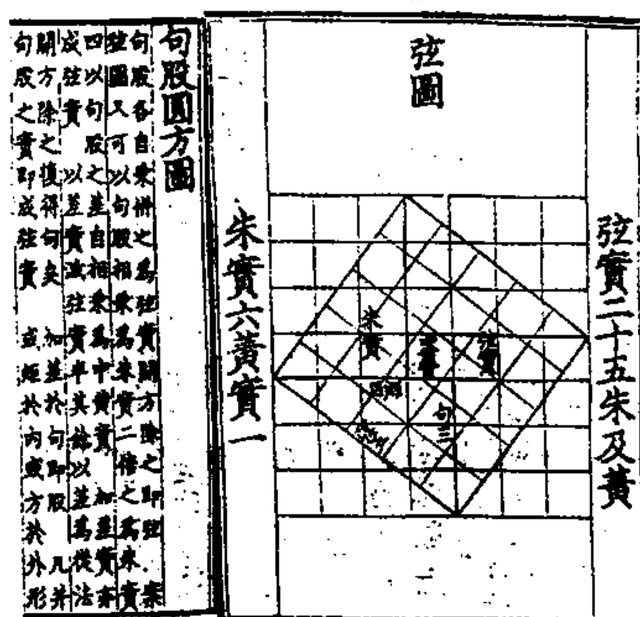
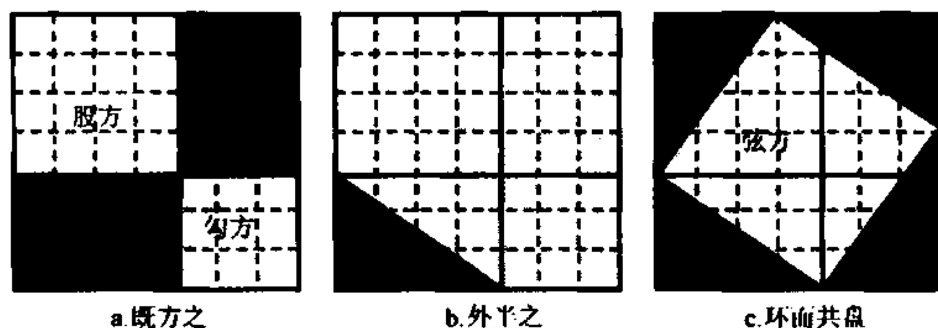


图 1-2　赵爽的弦图

至少从清代冯经的《周髀算经述》开始，就不断有学者认定上述文字是在证明勾股定理，但是一直没有定论。到了 20 世纪 80 年代，程贞一、陈良佐、李国伟、李继闵等人相继讨论这个问题，他们通过对上述引文中第二句的诠释，各自从不同的角度分别“发现”《周髀算经》已经严格地证明了勾股定理。[8~11] 后来，笔者也加入了这场热闹的讨论，这里谨将笔者的“发现”简述如下：[12]



a.既方之　　b.外半之　　c.环而共盘

图 1-3　《周髀算经》中之弦图的“发现”

《周髀算经》原文中的第二句，给出了构造一个弦图的程序，这个程序可以用三个图形表达，如图 1-3 所示。

第一步，画出一个内含以勾、股为边长之正方形的大正方形，这叫“既方之”。

第二步，将大正方形中的一个红色矩形从外侧裁去一半，是为“外半其一矩”。

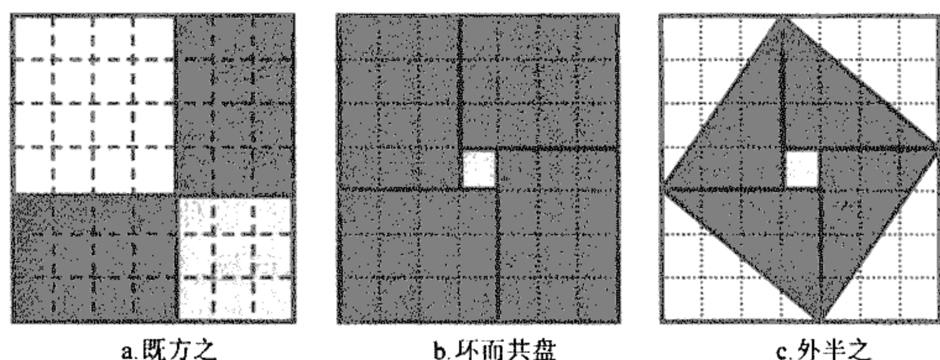
第三步，将裁下的红色三角形绕大正方形盘而环之，即“环而共盘”。由此，即将图 1-3a 中的股方与勾方，等积地转化为图 1-3c 中的弦方。于是，勾股定理得证。

通过对《周髀算经》原文的解读分析，我们“发现”那里的确存在一个对于勾股定理的证明，同时我们还“发现”，这个证明是通过对一个弦图的构造而完成的。显而易见，《周髀算经》中的弦图（图 1-3c）与赵爽的弦图（图 1-2）是不同的。事实上，我们可以从赵爽的“句股圆方图”的陈述中确证这个猜想：

> 句股各自乘，并之为弦实，开方除之，即弦。
>
> 案：**弦图又可以**句股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以句股之差自相乘为中黄实，加差实，**亦成弦实**。（文献[12]，148～149）

上述文字的第一句，是勾股定理的一个完整的陈述。“案”之后的文字所描述的“弦图”显然是赵爽的弦图（图 1-2）。这段文字中引人注目的是这样两句话：“弦图又可以”、“亦成弦实”，都明白无误地指出了这样的事实：在赵爽的弦图（图 1-2）之前，《周髀算经》已经构造了一幅弦图。根据前面的叙述，我们知道了商高的这幅弦图的构造过程（图 1-3），那么，紧接着的问题就是，赵爽的弦图（图 1-2）是如何构造出来的呢？

让我们再回顾一下构造《周髀算经》弦图的三个步骤：既方之、外半之、环而共盘。假如将后两个步骤颠倒一下，会产生什么结果？如图 1-4 所示，正好将赵爽的弦图构造出来。



a.既方之　　b.环而共盘　　c.外半之

图 1-4 赵爽弦图的复原

这就是对赵爽弦图的构造过程的"复原"。

这个问题,在李钱时代通常是不会有人想到的,因为,赵爽的弦图是对勾股定理的证明,这一点是显而易见的,从"发现"的角度来看,这已经足够了,"猜测"其构造过程是不必要的。

但是,根据赵爽的"句股圆方图"的叙述,我们知道赵爽的弦图是在研究《周髀算经》的弦图之后创造出来的,因此,在吴运动中,"复原"赵爽弦图的构造过程就成为一个理所当然的课题。

过去的 20 多年中,大量的中国数学史研究都是按照类似的做法,在"复原"历史上的数学是如何做出来的。

第二节 数学史研究范式的转换

科学史是一门奇特的学科。一方面,它的研究对象分布在跨历史、跨学科、跨文化的极其广泛的时空中;另一方面,它的专业研究人员相对来说数量极少,可以说绝大多数的科学史家都是因爱好而将科学史作为自己的第二职业的。这种现实,为科学史专业发展成为一门独立的学科制造了很大的障碍,因此,特别需要一种专业的规范,也就是在科学史界的内部达成默契,形成一种科学史家都自觉或者必须遵守的研究范式。

不过,并不是所有国家或地区的科学史界都具备了某种研究范式。科学史界要形成一种研究范式,必须满足这样两个先决条件:首先,有权威的科学史家倡导某种明确的科学史研究方法;同时,还要有一批杰出的、志同道合的科学史家在这种方法的指导下身体力行。他们怀有对科学史事业的共同信念,这种信念引导他们以某种共同的方法论,探讨某个共同的基本问题。由于他们的权威性,使得其他的科学史工作者跟从或效仿。那些无视、或者不愿意接受这种研究范式约束的科学史工作者,便很有可能因此被排除在科学史界的"主流"圈子之外。

在过去的100年中,在李俨和钱宝琮、吴文俊等学者的倡导下,先后发动了以"发现"与"复原"为主题的两次运动,造就了一大批杰出的数学史家,在中国传统数学的研究领域取得了丰硕的成果,成功地完成了一次研究范式的转换。

我们希望通过对这两次运动的特点的概括与分析,建立一个模型,用以说明李钱运动与吴运动对中国的数学史研究的深刻影响。同时,我们还希望利用这个模型,解释两个重要的现象:为什么中国的数学史研究在20世纪70年代初期和现在两度出现低潮?为什么绝大多数的中国数学史家都将自己的研究兴趣集中在中国传统数学上?

我们相信,对于这些重要现象的解释,不仅有助于我们更加清楚地了解我们已经走过的道路,看到我们的成绩,发现我们的局限,而且有助于我们展望未来的光明前景。

一、原创性研究概念的扩展

在李钱领导的中国数学史研究的第一次运动中,"发现",意味着破解历史上都做出了什么样的数学。在这个时期,数学史家们必须直接从原始的数学文献中找寻他们的发现,他们所遵循的研究法则,实际上是传统史学的研究法则,那就是靠史实说话。一

方面,对于所"发现"的事实本身,有一分证据,做一分结论,绝不允许掺杂个人的臆想。另一方面,尽量用现代数学的概念与方法通俗地解释或证实所发现内容的数学意义及其正确性。

在吴文俊领导的第二次运动中,数学史研究范式中的"发现"被扩展到"复原"。这个阶段的数学史家开始关注历史上的数学是如何做出来的。数学史研究中的"复原",是对数学史实的一种合理重建,通常的情形下都是基于某些间接的历史文献,对已经"发现"的历史上的数学概念、思想、方法、定理或算法等进行"复原"。概而言之,"发现"的是结果,"复原"的是过程。

在李钱运动中,数学史家对他们所"发现"的历史上的数学的来龙去脉也进行"复原",但是这种"复原"基本上都是根据现代数学知识对其"发现"的解释与确证,大多数数学史家并没有刻意地按照历史主义的原则去复原古人的数学思想或方法,其"复原"的目的,只是为了更方便地说明或强调其"发现"的数学内涵或历史意义,与吴运动所强调的"复原"完全不是一个意思。

在以"发现"历史上有什么数学为研究范式的时代,数学史研究比较容易受到各种爱国主义情结的影响。其后果之一,就是在所"发现"的数学成果中,特别强调对于"世界第一"的认证。这种倾向,客观上加剧了数学史家更加注重运用现代数学的概念与方法去解释或验证所"发现"的古代数学。吴运动中形成的以"复原"为特征的研究范式,在一定程度上,对数学史研究中的这种倾向有所扭转。

在李钱运动中,数学史界所形成的研究范式是:只有"发现"才被接受为原创性的研究工作,在这个时期,一篇数学史的研究论文,一定要有所"发现",否则便不会被数学史界所承认。

在吴运动中,数学史的研究范式从"发现"被扩展为"复原"。在这个时期,新的"发现"仍然被视为数学史研究的重要成果,但是,对前人所"发现"的历史上的数学的"复原"研究,不仅被承认是数学史的原创性工作,而且成为更加重要的主题。

中国数学史界所遵从的这个研究范式的转换,将数学史的原创性研究的概念进行了扩展,从而极大地扩充了数学史的研究范围,丰富了数学史的研究资源。绝大部分在李钱运动中“发现”的研究成果,都被转换成为吴运动中的研究对象。那些第一次运动中的种种“发现”,化为一个个猜想,证明这些猜想,便成为第二次运动的主流。

我们可以据此将中国数学史家所遵循的研究范式建立一个模型,如图1-5所示。显而易见,对于中国数学史家而言,所有的数学史的原创性的研究成果,都是根据这个范式来判定的:一篇数学史的研究论文,要么有所“发现”,要么有所“复原”,至少必具其一。数学史家的任务,就是去“发现”或“复原”历史上的数学。

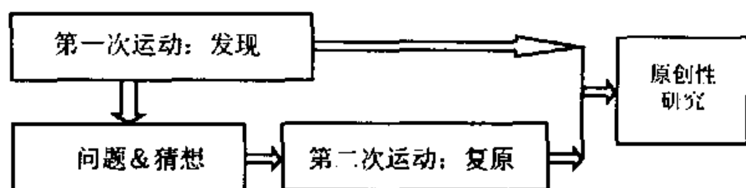


图1-5 数学史研究中的原创性工作:过去与现在

二、两个现象的解释

在本节的开始,我们已经说过,20世纪的中国数学史研究,存在着两个重要的现象,长期以来始终困惑着许多的数学家与数学史家,第一,中国的数学史研究经历了高潮—低谷—高潮—低谷交替出现的局面;第二,绝大多数的中国数学史家都将自己的研究局限在中国传统数学的领域中。

这些现象之所以存在和发生,必然有其深刻的历史背景与原因。对于这些历史事实之产生原因的分析与解释,无疑将有助于数学史研究在中国的健康持续的发展。

现在,就让我们尝试着利用由图1-5所建立起来的模型,对这

些现象做出一个解释:

李钱运动在20世纪70年代的式微,是其研究范式本身所带来的结果。因为,在以"发现"历史上有什么数学为数学史研究的中心任务的前提下,如果数学史家能够接近的数学史料是有限的,那么,可以"发现"的历史上的数学必然越来越少。事实上,正是由于研究资源的"枯竭",使得当时的数学史家做出新的"发现"的希望越来越困难,从而导致了中国数学史研究的第一次危机。

20世纪70年代后期吴运动的蓬勃兴起,基于这样的历史事实:数学史的研究范式从"发现"扩展为"复原",数学史研究的中心任务从"发现"历史上有什么数学被转移到"复原"历史上的数学是如何做出来的。正是这种研究范式的转换,为当时的数学史家提供了大量的研究课题,所有已经"发现"的历史上的数学,都面临着一个问题:这些数学是如何做出来的?那些等待"复原"的问题,使得原本渐近"枯竭"的数学史研究资源一下子变得丰富起来,为中国的数学史研究创造了又一次生机。

吴运动对于中国数学史研究范式的转换,虽然克服了20世纪70年代的危机,并开创了中国数学史研究的第二次高潮,但是,仍然没有彻底改变这样的现实:绝大多数的中国数学史家都将自己的兴趣专注在中国传统数学的研究上。

尽管近20年来的中国数学史界培养了大批的数学史专业的研究生,来自各方面要求大力开展世界数学史与近现代数学史研究的呼声或压力也不断加强,可是,从事这个方向研究的队伍始终十分薄弱,令人失望。问题究竟出在哪里?

如前所述,数学史研究在中国的价值标准,是由两次运动的研究范式对原创性工作的规定所决定的,由图1-5所建立的模型可以看出,所谓数学史研究的原创性工作,都是基于对原始文献的"发现"或"复原"所做出的。

一方面,在20世纪末之前,尚有不少的中文数学史料等待"发现"或"复原",从事中国数学史研究的学者并没有强烈地面临研究

资源枯竭的危机感，对于中国古代数学史料的“发现”或“复原”，因符合数学史的研究范式，比较容易得到承认，国际上的学术交流也非常频繁，因此，主观上，多数学者愿意从事这方面的研究。

另一方面，对于绝大多数的中国数学史家来说，除英文、俄文与日文外，很少有人通晓其他的外语，他们可以接近的数学史料基本上都是中文的，或者是二手的英文文献，西方数学史与现代数学史的研究虽然更广泛地受到了数学家或普通读者的欢迎，但是，数学史家却很难期望从这些研究中得到什么“发现”或者“复原”。这意味着，从事这个方向的研究，便有不被数学史界所承认的风险。因此，客观上，限制了这个方向的发展。

这大约就是为什么绝大多数的中国数学史家都将自己的研究局限在传统中国数学领域的根本原因。

第三节　从历史上的数学走向数学的历史

一、危机与启示

中国的数学史研究在经历了 20 世纪最后 20 多年的繁荣之后，又陷入了新一轮的危机，这已经是不争的事实。

危机的标志之一，许多数学史家的主要精力开始用在了撰写大量的重复性的数学史著作中；标志之二，数学史家似乎已经没有了富有挑战性的、新颖有趣的、共同的话题；标志之三，培养的研究生虽然越来越多，但是，继续坚定地从事这个专业研究的青年学者却越来越少。

为什么会发生这样的事情？数学史家该如何应对这样的局面才能够重振这个学科？这是每个中国数学史家都应该认真思考的问题。

法国数学家庞加莱（Henri Poincaré）在 1908 年的国际数学家

大会上说过这样一句话：

> 如果我们希望预测数学发展的未来，适当的途径是了解这门学科的历史与现状。

要预测数学史发展的未来，这句话似乎应该同样适用。这也就是我们不惜花费许多的篇幅来回顾数学史研究在中国的根本目的。

在第一节中，我们已经大体上描述了数学史这门学科在中国的历史与现状，它在20世纪经历了两次高潮，克服了一次危机，成功地完成了从"发现"到"复原"为主题的研究范式的转换。从这个历史的总结中我们可以获得什么启示呢？

从根本上来说，数学史是一门历史。因此，"发现"历史上曾经做出了什么样的数学，始终是数学史研究中最基本的道路，在李钱运动中，它曾经被认为是数学史研究的唯一方式，对历史上的数学思想方法的"复原"研究并没有认真地对待。直到吴文俊在20世纪70年代提出修正李钱的数学史研究范式，情况才有所改观。

吴文俊对于旧的数学史研究范式的批判，其初衷也许是为了提倡一种新的数学史研究方法论，以便纠正泛滥于数学史研究中的那种错误的思想方法。有意思的是，由于吴范式的提出，扩展了数学史研究中的原创性概念，为数学史家带来了大量新鲜的、有趣的研究课题，从而迅速导致了吴运动的兴起，使得中国数学史研究顺利克服了发生在20世纪70年代的危机。

由此可见，引导中国数学史家走出20世纪70年代困境的最重要的因素，就在于整个数学史界开始接受一种更广泛的"原创性研究的概念"，数学史研究，不再囿于传统史学以"发现"筑起的藩篱。寻求历史碎片的铁证，让位于恢复数学思想的逻辑线索，新的方法论所倡导的"古证复原"，给数学史家们的思想提供了前所未有的广阔空间。只要注意到在过去的20年中那些多少带有一点"猜测"成分的"复原"研究，在李钱时代几乎都是不被认可的，就不难体会到吴运动带给新一代数学史家自由驰骋的快乐了。

二、第三条道路

事实上，与 20 世纪 70 年代的情形有些类似，中国数学史家目前所再度面临的困境，仍然是现有的数学史研究范式中的原创性成果的概念，“发现”或者“复原”，将我们的研究局限在“历史上的数学”。由于中国数学史家真正可以接近的第一手的数学史料是有限的，无论是“发现”还是“复原”，研究资源的逐渐枯竭恐怕都是无法避免的结局。

为了从根本上保持在原有的研究范式的指导下继续繁荣数学史的研究，只能通过号召青年数学史家学习并掌握其他的外语，如希腊文、阿拉伯文、梵文、拉丁文等，以便可以接近更加丰富的原始数学文献，从而在更广泛的史料中去“发现”或“复原”历史上的数学。吴文俊建立的“数学与天文丝路基金”，就是朝着这个方向做出的可贵的努力。

另外，如果仅仅接受“发现”与“复原”为正当的数学史研究，那么，即使数学能力很强，没有语言和资料的障碍，现代数学史的研究工作也依然很难开展。

因此，要想面对目前的困境有所作为，除了提高数学史研究人员自身的数学、语言与历史修养之外，适当的方式就是进一步扩展数学史研究中的原创性概念，也就是说，现有的研究范式应该在一定程度上得到进一步的修正。

在我们以前的讨论中已经反复指出，在李俨与钱宝琮、吴文俊的领导下，中国数学史研究在过去的一个世纪中经历了两次运动，分别走出了数学史研究的两条不同的道路，即

第一条道路：有什么样的数学？（What mathematics was done）

第二条道路：如何做出来的数学？（How mathematics was done）

在这样的基础上，数学史家理应进一步思考下面的问题：

第三条道路:为什么要做数学?(Why mathematics was done)

当数学史家们同时接受了这样3种不同的数学史研究取向作为新的研究范式,我们的研究所关注的问题便可以从历史上的数学,扩展到数学的历史。这样一来,所谓数学史研究中的原创性工作的范围,便可以得到进一步的扩展。

数学思想始终是数学史研究所应关注的主题,在很大程度上,数学史就是数学思想史。当我们在旧的研究范式的指导下去发现、复原、回顾并欣赏历史上的各种各样丰富多彩的、具体的数学成就的时候,一个重要的方面常常会被我们所忽略,那就是,历史上为什么会产生这样的数学?

三、数学史研究的目的

任何一门学科,都有自己的基本问题。数学史学科的基本问题,就是要回答"数学是什么"。要想从历史的角度探讨这个问题,就必须搞清楚"为什么要研究数学"。因此,在很大程度上,"为什么数学"就是数学史研究的主要目的。但是,由于种种原因,这个目的常常为数学史家所忽视。

早期的科学史著作,基本上都是科学家们自己撰写的。对于这些从事科学研究的人们来说,影响科学发展的动力主要来自科学领域本身。自从20世纪中叶科学史研究职业化以来,越来越多的历史学家和社会学家开始关注文化与社会背景对科学思想的发展的影响,由此,就形成了科学史研究中所谓"内史派"与"外史派"之争。

许多传统的数学史家担心,一旦强调"为什么数学",那么数学史研究的外史(社会史)倾向就可能占据主流,从而导致数学史家更加关注社会、政治、经济等外部因素对数学发展的影响,而逐渐忽略对数学思想与内容本身的研究。

实际上,吴文俊的许多数学史研究已经远远超出了"古证复

原”的范围，在更多的场合中，他所关注的问题并不仅仅是中国古代有什么样的数学以及这些数学是如何做出来之类的问题，而是传统中国数学思想在世界数学发展史上的地位与价值。他认为，以古代中国为代表的东方数学的机械化算法体系和以古希腊为代表的西方数学的公理化演绎体系的数学思想，在人类数学的发展史上交替占据着支配的地位。在这种不同凡响的数学史观的指导下所进行的研究，必然要涉及“为什么数学”这个主题。[13]可惜的是，这些深刻的主张，似乎还没有被广大的中国数学史家认真自觉地贯彻到他们的行动中来。

许多大科学家在谈到如何研究科学史时，都强调探讨“为什么科学”的问题，是科学史研究的主要目的。例如，法国数学家韦伊(André Weil)在1978年国际数学家大会的1小时报告中讨论的主题是“数学史为谁而写”，在其报告的最后，他说：“因此，我们最初提出的‘为什么要研究数学史’的问题最终转化为‘为什么要研究数学’。”[14]

哈佛大学的生物学家迈尔(Ernst Mayr)在其《生物学思想发展的历史》的“绪论：怎样写生物学史”中说道：

> 在疑问式历史中重点是从事专业工作的科学家以及他的观念世界。他所处时代的科学问题是什么？在企图解决问题时他拥有一些什么样的观念和技术手段？他所能采用的方法是什么？在他所处的时代中有些什么流行观念指导他的研究并影响他的决断？像这一类性质的问题在疑问式历史的研究中占有主导地位。[15]

他认为：“疑问式历史的精髓就是问为什么。”

事实上，围绕“为什么数学”这个主题，数学史家有很多有意思的工作要做。小到一个数学概念、算法、符号为什么被提出？大到一个数学分支是如何发展起来的？是什么因素左右着主流数学的形成？数学大师们为什么要从事数学研究？不同的古代文明为什么要研究数学？为什么中国人选择了“实用”的数学传统？[16]

拒绝接受“为什么数学”的研究取向的另一个原因,也许是担心一些主观臆测的东西可能泛滥于数学史研究之中。但是,吴范式取代李钱范式的过程中,已经打破了传统史学“绝对客观”的研究戒律,“复原”研究中的大量成果都是“客观+臆测”的产物,如果进一步扩展数学史的原创性研究的范围,势必在我们的研究中具备越来越多的主观性与臆测性。不过,主观性的陈述往往比一本正经的客观性陈述更激动人心,因为它更具有启发性,因此,从历史的发展来看,这种趋势是不可避免的。正如迈尔所说:

> 对为什么的问题的回答虽然不可避免地具有一定程度的臆测性和主观性,然而却能迫使人们去整理研究结果,迫使人们采取符合臆测推理的方法不断审查自己的结论。“为什么”问题的合理性目前在科学研究中,特别是在进化生物学中已经巩固地建立起来,在历史的撰写中就更不应成为问题。在最不济的情况下,这种为什么问题所必需的详尽分析也有可能断定问题背后的假设是错误的。即使这样,也能提高我们的认识。[15]

有人曾经说过,学习一门学科的历史是理解其概念的最佳途径。实际上,只有搞清楚了“为什么数学”的历史,数学史才能真正成为理解数学概念的最佳途径。

四、走向数学的历史

没有方法论指导的数学史研究是盲目的,没有数学史家们共同默许并遵守的研究范式,其研究工作完全听凭研究者的兴致所至,信马由缰,那么数学史界势必形如一盘散沙,根本不可能发展成为一门独立的学科。

中国数学史界正是凭借着李俨与钱宝琮、吴文俊等学者的统帅,在不同的时期形成了不同的研究范式。在过去的20多年中,吴运动的“复原”取代了李钱运动的“发现”而成为主宰中国数学

史研究的主流。正是由于吴文俊的高瞻远瞩的指导思想,使得中国数学史处于在一种明确的研究范式的指导下的蓬勃发展阶段,才形成了数学史研究在中国的第二次高潮。

迄今为止,中国数学史家所遵循的研究范式,使得他们的兴趣集中在历史上某些具体数学成就的“发现”与“复原”。毋庸置疑,探索和发掘历史上“有什么”和“如何做”数学,永远是数学史研究的两个基本的主题,只要历史在发展,他们就在继续。

就数学史而言,一种新的研究范式的提出,并不意味着对旧的研究范式的颠覆或否定。它应该被视为是一种扩充和进步。新的范式,是在旧的范式的基础上建立的。没有对历史上的数学的“发现”,就谈不上对这些数学成就的“复原”。不知道历史上有些什么样的数学,这些数学是如何做出来的,就无从探讨为什么要做这些数学。因此,“有什么”、“如何做”、“为什么”代表了数学史研究逐渐递进的三个阶段。

新的运动总是伴随着旧的运动的式微而兴起的。随着数学史研究中“有什么”与“如何做”等工作的逐渐深入,探索数学史研究中“为什么”的问题迟早会成为数学史家们共同瞩目的核心问题。因此,中国数学史家在经历了李钱运动与吴运动所取得的丰硕成果的基础上,正是将研究重心适时地转入下一个阶段的时候。这场预期的新运动的主题,就是探索人类为什么要做数学?在“为什么数学”的主题下,数学史家将面临大量有趣且有意义的问题,对于这些问题的探讨,不仅有可能使我们更快地走出目前的困境,而且可以将中国数学史家的研究从历史上的数学,引领到数学的历史。

参 考 文 献

[1] 薮内清. 隋唐历法史の研究. 东京:三省堂,1944. 71 ~ 74
[2] 李俨. 中算家的内插法研究. 北京:科学出版社,1957

[3] 钱宝琮(校点). 算经十书. 北京: 科学出版社, 1963. 32

[4] 吴文俊. 我国古代测望之学重差理论评介兼评数学史研究中的某些方法问题. 见:科技史文集(8). 上海:上海科学技术出版社,1982. 10~30

[5] 吴文俊.《九章算术》与刘徽. 北京:北京师范大学出版社,1982. 162~180

[6] Wu Wen-tsun. Recent Studies of the History of Chinese Mathematics. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1986. Providence: American Mathematical Society, 1986. 1657

[7] Qu Anjing. The Third Approach to the History of Mathematics in China. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2002, vol. Ⅲ. Beijing: Higher Education Press, 2002. 947~958

[8] Chen Cheng-Yih. A Comparative Study of Early Chinese and Greek Work on the Concept of Limit. In: Science and Technology in Chinese Civilization. Singapore: World Scientific Press, 1987. 35~44

[9] 陈良佐.《周髀算经》勾股定理的证明与出入相补原理的关系. 汉学研究,1989, 7(1):255~281

[10] 李国伟. 论《周髀算经》"商高曰数之法出于圆方章". 见:鲁经邦编. 第二届科学史研讨会汇刊(台湾),1991. 227~234

[11] 李继闵.商高定理辩证. 自然科学史研究,1993,12(1):29~41

[12] 曲安京.《周髀算经》新议. 西安:陕西人民出版社,2002. 29~41

[13] Wu Wen-tsun. Mathematics Mechanization. Beijing: Science Press & Dorrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 1~66

[14] André Weil. History of Mathematics: Why and How. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki 1978. Helsinki: Academia Scientiarum Fennica, 1980. 236

[15] [美]迈尔. 生物学思想发展的历史. 涂长晟等译. 成都:四川教育出版社,1990

[16] Qu Anjing. Perche la matematica nella Cina antica? In: Matematica e Cultura 2003. Milan: Springer-Verlag, 2003. 205~217

第二章　中国传统历法的构造机理

中国古代最后一部真正意义上的传统历法大约就是元代郭守敬的《授时历》(1280)了，明代的《大统历》基本上继承了《授时历》的算法，没有什么创新。此后，中国历法受到西方天文学的影响，已经与原来的传统有所不同。

而在《授时历》之前，几乎所有的传统历法都有一个共同的特点，那就是围绕着上元积年来编排历法。上元的选择是如此重要，以至于陈遵妫认为"一部中国历法史，几乎可以说是上元的演算史"。[1]事实上，从某种意义上讲，弄清楚了上元积年的算法系统，就算是搞清楚了传统历法的构造机理。

第一节　不定分析与上元积年

不定分析历来是中国传统数学所十分关注的重要课题。中算家在这个领域内最为后人称道的成绩，就是有关一次同余理论的研究。现在已经很清楚了，一次同余问题之所以引起中算家的兴趣，其天文学背景就是有关上元积年的推求。

现存最古老的《三统历》(公元前104)中已经开始了对理想上元的推求，自此以降，选择合适的上元便成为中国古代传统历法所必须完成的首要任务之一，从某种意义上讲，中国传统历法基本上都是围绕着上元的选择而编制出来的。

上元是中国古代数理天文学中人为设定的一种理想的历元。从数学上看，确定一个上元通常需要解决一个同余式组。至少到了祖冲之(429～500)的时候，寻求上元所布列的同余式组已经相当复杂，若无一般的算法，可以肯定将很难实现。而经过李淳风

《麟德历》(664)的改革,演纪上元算法系统终于确立,直到郭守敬(1231~1316)彻底废除积年日法,对上元的推算方告结束。[2]

不幸的是,随着郭守敬对上元算法体系的扬弃,长达1000多年的上元演算方法亦告失传。清代以来,围绕上元积年而产生的一些历史悬案,不仅成为数学史界关心的热点,而且也在天文学史界形成了许多引人入胜的研究课题。

有关中国古代历法中上元积年的计算方法,引起学者们兴趣与争论的问题主要有如下几个方面:

首先,古人到底是用什么方法推求上元的?根据秦九韶《数书九章》(1247)的记载,中算家可以使用大衍术(即中国剩余定理)与演纪术等两种算法求解一次同余式组。[3]这两种算法是否都曾用于上元积年的推算?

其次,唐宋时期的演纪上元具体是如何选择的?选择基本天文常数的调日法算法与上元积年的关系是什么?[4]

最后,由于推求上元所布列的同余式组都是由天文常数所构成的,设若有关的常数都参与了上元的推算,同余式组的解将极端巨大。到底哪些天文常数参与了上元积年的推求?[5]那些未参与上元推求的天文常数究竟是如何与既定上元相配合的?

经过多年来众多学者的共同研究,这些为中国天算史界深为关注的重要问题,目前大体上已经获得了解决。本节将首先讨论大衍术与演纪术同上元推算的关系,并给出这两种算法在用于上元推算时的等价性证明,然后再论述中国古代历法之上元算法系统的一般程序,并由此引出中国古代数理天文学中独特的天文常数系统,从而给出中国传统历法编制系统的构建机理及其一般模式。

一、什么是上元积年

简言之,上元是一种理想的历元。它通常发生在某个甲子年天正11月的甲子日夜半,要求此时恰好是合朔冬至时刻,月亮经

过升(降)交点与近(远)地点,木火土金水五大行星同时会聚冬至点,并要求冬至点位于北方之中虚宿之内。

这是一个非常奇异的天象,实际上可以说是不存在的。中国古代历法家编制历法的第一步,就是根据对当时天象的观测结果,推算出一个满足上述条件的上元。很明显,这种推算,要归结为一个数学问题,那就是求解一个庞大的同余式组。

按照最为理想的情形,与上元有关的天文常数计有回归年、朔望月、恒星年、交点月、近点月与木火土金水五大行星的会合周期。加上岁名与日名的干支周期,可以列出 11 个联立的一次同余式。

假令 N_n 表示公元 n 年距上元积年,t 为回归年常数,u 为朔望月常数,u_i 分别表示恒星年($i=1$)、近点月($i=2$)、交点月($i=3$),以及木、火、土、金、水($i=4,5,6,7,8$)五大行星的会合周期,则一个理想的上元应该由如下的同余式组确定

$$\left.\begin{aligned} N_n &\equiv R_0(\mathrm{mod}60)\\ tN_n &\equiv r_1(\mathrm{mod}60)\\ tN_n &\equiv r_2(\mathrm{mod}u)\\ tN_n &\equiv r_{2+i}(\mathrm{mod}u_i)\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}1)$$

其中,R_0 为所求年岁名干支,r_1 为所求年天正 11 月朔之日名干支及小余,r_2 为所求年年终闰余,r_3 为上元至所求年冬至点位移,r_4 为所求年冬至时刻月亮近地点与冬至点之间距,r_5 为所求年冬至时刻黄白道降(或升)交点与冬至点之间距,r_i($i=6,7,8,9,10$)为所求年冬至时刻距日星会合时刻的时间。

实际上,一个理想上元的确定应该还不止这 11 个同余式,譬如说,所求年冬至时刻五星的近日点与冬至点的间距也是必须考虑的条件。不过,由于各个历法中有关五星的近日点周期常数都比较粗糙,我们就不把这些列入上述同余式组了。

从数学上看,上元的选择相当于计算某个同余式组,这样的方法一般有两个:一为中国剩余定理,一为代入法。这两种算法在秦九韶的《数书九章》中都有详细的论述,他分别称之为"大衍总数

术"与"演纪术"。

二、中国剩余定理与上元积年

1. 中国剩余定理

中国剩余定理,即大衍总数术,简称大衍术。这是秦九韶推广《孙子算经》(约4世纪)中的孙子定理而创立的一种求解模数不必两两互素之一次同余式组的算法。假设给定一个同余式组

$$x \equiv r_i (\mathrm{mod}\, b_i), i = 1,2,\cdots,n \tag{2-2}$$

其中,r_i 为余数,b_i 为模数,x 为所求数。大衍术的第一步是将模数(秦九韶称之为问数) b_i 化为标准型:定数 a_i,条件是①$a_i \mid b_i$;②$(a_i,a_j)=1, i \neq j$;③定数 a_i 与问数 b_i 的最小公倍数相等。于是,将同余式组(2-2)化为

$$x \equiv r_i (\mathrm{mod}\, a_i), i = 1,2,\cdots,n \tag{2-3}$$

第二步,令 $M = \prod_i a_i, M_i = \frac{M}{a_i}, i = 1,2,\cdots,n$。运用大衍求一术求得乘率 k_i,使得

$$k_i M_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\, a_i), i = 1,2,\cdots,n$$

最后得出式(2-2)之通解如下

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i k_i M_i - PM$$

选择适当的 $P \in N$,使 $0 \leqslant x < M$。

以上是秦九韶设计的中国剩余定理的主要程序。

2. 依剩余定理推上元积年

秦九韶的剩余定理曾经被广泛地认为用于中国古代历法中的上元积年的选择,钱宝琮曾说:

> 大约在三世纪中历法工作者开始应用剩余定理计算上元积年。我们认为《孙子算经》里"物不知数"问题解

法不是作者的向壁虚造而很可能是依据当代天文学家的上元积年算法写出来的。[6]

在中国天算史界，钱宝琮的上述看法，几乎成为"定论"。那么，按照剩余定理，究竟是如何计算上元积年的呢？

假设上元是根据同余式组(2-1)推算出来的，则利用剩余定理推求上元积年 N_n，通常由以下四个步骤构成（图 2-1）：

第一步，选择合适的基本天文常数，如回归年与朔望月等。这一步主要是根据调日法算法，先选择适当的日法 A（各种基本天文常数的分母），再确定历取天文常数。然后，根据实际观测，列出同余式组(2-1)，并规定余数 $r_1, r_2 \cdots$ 的调整范围。其中，R_0 为所求年岁名干支的序号，不可调整。

第二步，在确定的调整范围之内，将保证同余式组（2-1）可解的余数组（$r_1, r_2 \cdots$）全部挑选出来。若某个余数在其规定的可调整范围内没有合用的数值，则中断该程序，重新选择日法 A，并构建新的同余式组(2-1)，直到在规定的范围内确定出至少一组保证该同余式组有解的余数组（$r_1, r_2 \cdots$）。

第三步，按剩余定理求解上元积年 N_n。

第四步，若所得上元积年数 $N_n \geqslant 10^8$，将被视为不合用解，此轮计算无效，再行调日法，重新构建同余式组(2-1)。反之，则历取上元积年确定，程序结束。

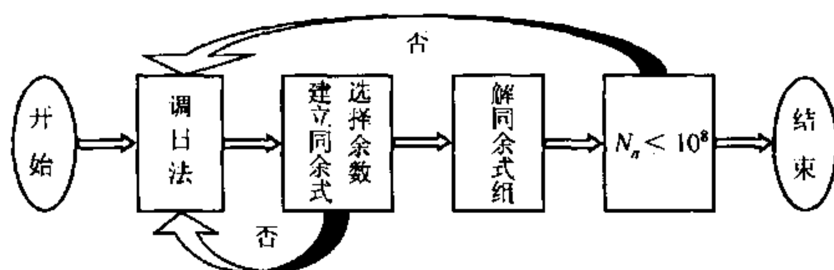


图 2-1　剩余定理推上元算法

在图 2-1 的程序中，有一个关键的步骤在中算史上找不到任

何根据，即一次性对同余式组的全部余数 r_i 的选择。

3. 剩余定理在上元算法上的主要问题

实际上，虽然说秦九韶大衍术将问数 b_i 化为定数 a_i，是对孙子定理的重大改进，这使得他可以处理大量的模数非两两互素的实际问题。但他同时也犯了一个大错，那就是忽视了对同余式组(2-2)与式(2-3)之同解性的判定。

问题的实质是，同余式组(2-2)有解的充要条件是

$$\forall i,j,(b_i,b_j)\mid(r_i-r_j)$$

如果不满足这个条件，则式(2-2)无解。但是，由于 $(a_i,a_j)=1$，$i\neq j$，所以式(2-3)总是有解的。

因此同余式组从式(2-2)到式(2-3)的转换，并非是一个同解的变换。大衍术中没有给出判定式(2-1)有解的任何条件，从《数书九章》中大衍类问题的设计与解答来看，也可以肯定秦九韶没有意识到这里面可能存在的问题。

秦九韶曾经试图以数据最简单的《四分历》为例，用大衍术推求其上元积年，结果还是错得不可收拾，原因就在于根据他的问题所布列的乃是一个无解的同余式组。因为大衍术缺乏对同余式组中余数 r_i 的调整选择功能，因此，它无法直接用于对上元积年的实际推算。如果说大衍术曾经用来进行对理想上元的选择，秦九韶断无理由不想到同余式组(2-2)的可解性问题。

那么，秦九韶为什么没有注意到这个问题呢？这是因为，对于大衍术来讲，按其程序，如果给定一个同余式组，就一定可以得到一组答数。设若该同余式组无解，那么这组答数就显然是一个错误的结果。正是这一点迷惑了秦九韶，使他没有想到大衍术自身设计的陷阱。

由此可以得到的合乎理性的结论只能是，大衍术并非用于上元积年的主要算法。

三、演纪术与演纪上元

演纪上元一词最早出现在一行的《大衍历》(727)中,以后的唐宋历法大多沿用之。演纪术是秦九韶《数书九章》中记录的一种按代人法次第求解同余式组的算法,秦九韶以宋代《开禧历》(1207)演纪上元的选择为例,演示了演纪算法的步骤。[7,8]

演纪术的思想其实非常简单,但因秦九韶用上元积年的实例来说明这个算法,使得推演过程显得十分的繁琐,给人的印象似乎反而不如大衍术豁达、自然、简明。因此,历来颇不受研究者的重视。

根据秦九韶《数书九章》中的演纪术,我们知道,用代人法求解上元积年 N_n,是按照以下步骤进行的(图2-2):

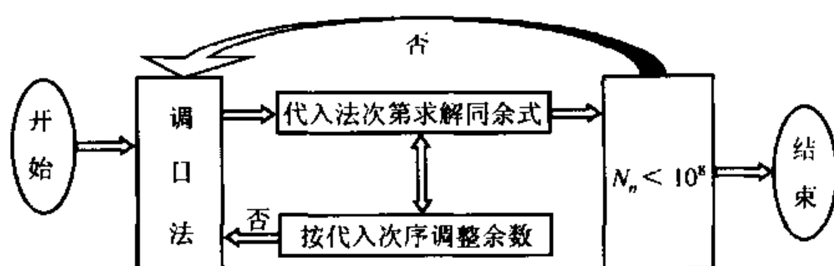


图2-2 演纪术推上元算法

首先,调日法,确定基本历法常数(如回归年与朔望月等),建立同余式组(2-1),并规定所有余数的调整范围。

对于以甲子为上元岁名的历法,直接将同余式组(2-1)中的第1式代入第2式,调整余数 r_1,使之有解;然后再将解代入第3式,并调整余数 r_2,使之有解;再将结果代入第4式,……如此往复,直至解得同余式组中的最后一个同余式。

在上述过程中,如果某个余数 r_i 在可调整的范围内没有合用者,则中断运算,重新调日法,构建新的同余式组。

最后,如果同余式组的解满足 $N_n < 10^8$,则上元确定,程序结

束。否则，此轮计算无效，当再调日法，从头再来。

以上算法，基本上就是《数书九章》的演纪术，秦九韶所选用的实际算例为鲍澣之的《开禧历》(1207)，所布列的同余式组为式(2-1)的前三个方程。

对于演纪术而言，因其以代入法求解一次同余式组，所以，只要懂得求解如下形式的一次同余式

$$ax \equiv r(\bmod b) \tag{2-4}$$

就可以逐步求解任何给定的同余式组。我们知道，同余式(2-4)有解的充要条件为

$$(a,b) \mid r$$

在秦九韶的演纪术中专门设计了确保式(2-4)可解的这个判别条件。有了一次同余式可解性条件的明确认识，只需用大衍求一术求得乘率 k，使

$$ak \equiv (a,b)(\bmod b)$$

即可方便地获得式(2-4)的解

$$x \equiv k\frac{r}{(a,b)}\left(\bmod \frac{b}{(a,b)}\right)$$

因此，秦九韶设计的演纪术是一次同余式组的一个完整的算法。与大衍总数术相比，演纪术的可贵之处就在于它考虑了同余式(组)的可解性问题，并且正确地给出了它的判别条件。演纪术除了在算法上弥补了大衍术的漏洞之外，从实用的角度来看，也明显较大衍术简捷。道理很简单，大衍术运算时，要对整个同余式组的所有数据同时处理，往往是许多大数的连乘连除，计算量十分庞大。而演纪术按代入法逐步求解，将同余式组化整为零，边运算，边化简，数据的处理量要小很多倍。这一点对于全部是“天文数字”构成的上元积年的同余式组来说，其简捷实用的效果的确是非同小可。

因此，从算法的可靠性与实用性来判断，演纪上元无疑是通过演纪术推导出来的。

四、两种算法系统的等价性证明

本章讨论的基本问题是：中国古代历法中的上元积年究竟是如何推算出来的？这个问题包含两个方面：首先，同余式组(2-1)的哪些方程(天文常数)参与了上元的推定？其次，到底是用什么方法来求解这个同余式组的？

由于推求上元所布列的同余式组通常达11个之多，加之所有的同余式都是由很大的"天文数字"构成的，因此，无论以大衍术或是演纪术求解这样的同余式组，尽管理论上问题不大，但实际上却是基本无法实现的。所以，虽然现代科学史家都相信中国古代的历算家具备解决这个问题的能力，但却无法以实例验证这样的推断。

这使我们怀疑上述推断的真实性：上元真是通过求解多达11个联立的同余式而推算出来的么？如果不是，到底哪些常数参与了上元的推算？其他常数又是如何与这个上元相配合的呢？

要解决这个问题，需要对同余式组的算法有一个理论的分析，即应该证明各种算法对一定条件下布列的某个给定的同余式组的解都是一样的。

我们已经看到，中国古代存在着两种求解一次同余式组的算法。由于从实际问题中布列的同余式组通常未必满足可解的条件，因此，对同余式组的算法来说，首先要解决的问题就是，当同余式组无解时怎么办？

这个问题实际上已为秦九韶在其《数书九章》中做出了部分回答，那就是根据同余式(2-4)的可解性条件，适当地调整余数 r，以保障式(2-4)有解。演纪术就是通过不断地代入、不断地调整余数 r_i，最终使式(2-2)得解的。

对于大衍术来说，虽然秦九韶没有记录，但我们今天已知同余式组(2-2)可解的充要条件是什么了。因此，要保障式(2-2)有解，在使用大衍术之前，可以根据这个可解条件，先行调整选择出适当

的余数组$(r_1,r_2,\cdots,r_n)$，以保证同余式组(2-2)有解。

容易证明，如果同余式组(2-2)有解，则其最小正整数解将是唯一的。因此，设若按不同次序的代入法或大衍术之可解性条件，调整出来的余数组不尽相同，那么导致同余式组(2-2)的解也必定是不同的。

如果假设给定一个形如式(2-2)的同余式组的余数组$(r_1,r_2,\cdots,r_n)$的调整范围是n维实数空间的一个子集K，即$(r_1,r_2,\cdots,r_n)\in K, K\subset R^n$，现在的问题是，当式(2-2)的余数组根据该同余式组的可解性条件遍取集合K时，按不同的方式获得同余式组(2-2)的解集合是一样的吗？事实上，我们可以证明这样的命题：

命题 当同余式组(2-2)的余数组$(r_1,r_2,\cdots,r_n)$满足其可解的充要条件

$$\forall i,j,(b_i,b_j)\mid(r_i-r_j) \tag{2-5}$$

时，那么按任何次序的代入法求解式(2-2)，都可以得到它的解。

由于任给一组余数，按大衍术都可以获得一个解，因此，这个命题实际上回答了我们的问题。也就是说，当同余式组(2-2)的余数组$(r_1,r_2,\cdots,r_n)\in K, K\subset R^n$时，无论以任何次序的代入法或大衍术求解式(2-2)时，其解集合都是一样的。这就是我们本节要讨论的演纪术与大衍术之算法的等价性的意义。以下我们按归纳法给出这个命题的一个构造性证明。

证明 对于同余式组(2-2)，当$n=2$时，由第一个同余式可令$x=r_1+b_1m$，将其代入第二个同余式，得

$$b_1m\equiv r_1-r_2(\bmod b_2)$$

上式有解的充要条件是：调整r_1,r_2，使之满足$(b_1,b_2)\mid(r_1-r_2)$。同理可证，当我们改变次序，以$x=r_2+b_2m$代入第一个同余式时，亦得有解的充要条件为$(b_1,b_2)\mid(r_1-r_2)$，可知，不同次序的代入法，其解不异。

当$n\leqslant p$时，假定命题亦成立，即解集合与代入次序无关，那么，在$n=p+1$时，我们定义几个符号：

$f_s = f_s(r_1, r_2, \cdots, r_s), s \leqslant n$，表示前 s 个同余式的最小正整数解；

$[b_s] = [b_1, b_2, \cdots, b_s], s \leqslant n$，表示模 $b_1, b_2, \cdots, b_s$ 的最小公倍数；

$\{b_s\} = ([b_{s-1}], b_s), s \leqslant n$，表示 $[b_{s-1}]$ 与模 b_s 的最大公约数。

于是，我们有前 $p-1$ 个同余式的解为

$$x = f_{p-1} + [b_{p-1}]m_{p-1}$$

将该解代入第 p 个同余式，则有

$$[b_{p-1}]m_{p-1} \equiv r_p - f_{p-1} (\bmod b_p)$$

用求一术求得乘率 k_p，使

$$[b_{p-1}]k_p \equiv \{b_p\} (\bmod b_p)$$

由此可得前一个同余式的解为

$$m_{p-1} = \frac{k_p(r_p - f_{p-1}) + b_p m_p}{\{b_p\}}$$

若令

$$f_p = f_{p-1} + \frac{k_p(r_p - f_{p-1})[b_p]}{\{b_p\}}$$

则有前 p 个同余式的解为

$$x = f_p + [b_p]m_p$$

将这个结果代入第 $p+1$ 个同余式，则

$$[b_p]m_p \equiv r_{p+1} - f_p (\bmod b_{p+1}) \tag{2-6}$$

如果同余式式(2-6)有解，就证明前 $p+1$ 个同余式构成的同余式组有解，而式(2-6)有解的充要条件为

$$\{b_{p+1}\} \mid (r_{p+1} - f_p) \tag{2-7}$$

所以，只要证明当余数 $r_1, r_2, \cdots, r_{p+1}$ 满足式(2-5)之条件时，式(2-7)一定成立，则命题即获证明。由于

$$r_{p+1} - f_p = r_{p+1} - f_{p-1}\left(1 - \frac{[b_{p-1}]}{\{b_p\}}k_p\right) - \frac{[b_{p-1}]}{\{b_p\}}k_p r_p$$

而按乘率 k_p 之定义，必有整数 m_p^0 使

$$1-\frac{[b_{p-1}]}{\{b_p\}}k_p=\frac{b_p}{\{b_p\}}m_p^0$$

又令 $r_{p+1}=r_p+(b_p,b_{p+1})s$,将它们代入上式,则

$$r_{p+1}-f_p=\frac{r_p-f_{p-1}}{\{b_p\}}m_p^0b_p+(b_p,b_{p+1})s$$

由归纳法假定,前 p 个同余式的可解性条件为 $\{b_p\}\mid(r_p-f_{p-1})$,加之 $(b_p,b_{p+1})\mid b_p$,所以有

$$(b_p,b_{p+1})\mid(r_{p+1}-f_p)$$

对前 p 个同余式,按我们的假定,其解与代入次序无关,因而同理可得

$$(b_i,b_{p+1})\mid(r_{p+1}-f_p),i=1,2,\cdots,p$$

由此即得式(2-7)。至此命题证毕。

现在我们可以放心地说,当同余式组(2-2)的余数组(r_1,r_2,…,r_n)在给定的某个 n 维集合 K 中任意取值时,无论以大衍术或是演纪术之任何方式求解,其解集合都是一样的。这样一来,就可以放心地讨论本章的主题:中国古代历法中的上元积年究竟是如何算出来的?

第二节 上元积年算法的理论分析

一、问题的提出

在元代《授时历》之前的中国传统历法中,几乎所有项目都是从上元起算的。从《乾象历》(206)开始,历法开篇的第一句便是"上元某某以来,到某某年某某,积某某年",确立了以上元积年统贯整部历法结构的模式。由于上元的选择直接关系到历法在应用时的精度,因此,治历者都从来对此不敢怠慢。

《授时历》废除上元,导致积年之法湮没不彰。明代以后,已

经没有人知道传统历法的上元积年究竟是如何推算出来的了。洎至清乾嘉时期，在复古思潮的驱动下，出现了以张敦仁、李锐、沈钦裴、宋景昌等人为代表的中算家，着手研究和发掘整理古代历算遗产，竟成一时风尚。

其中对上元积年研究最可称著者，首推张敦仁（1754～1834），他在《求一算术》一书，采用秦九韶《数书九章》中所创大衍总数术（即中国剩余定理）及演纪术两种不同方法，对《麟德历》等数部历法的上元积年进行了实例演算，为后人更深刻地认识上元推算的内在机制，提供了一份弥足珍贵的范例。然而，张敦仁在具体运算中，所选择的冬至时刻（余数 r_1）与合朔距冬至时刻（余数 r_2）都不需调整，直接运算便得出结果，显示既得数据的还原运算，并不能真切地、完整地反映实际情况。[9]

这引出了一次同余理论的可解性问题：一组联立的同余式，欲保证其有解，必须使其余数满足一定的条件。演纪术本身具备选择余数的功能，但张敦仁的算例中并未运用。而总数术在这一点先天不足，导致了秦九韶在《数书九章》中刻意设计的"古历会积"一问错误百出。

沈钦裴、宋景昌师徒在对《数书九章》的校勘中，十分敏锐地揭露了秦氏所犯错误之痼疾所在，这一发现提醒人们对总数术在上元推算中的应用产生疑问，引发了上元积年计算方法上的总数术论与演纪术论之争。[10]

清代学者的工作，所考虑的先决条件均不超过四个：日名、岁名、回归年与朔望月，其他历法项目诸如五星会合周期、交食周期、近点月等，一概不提，基本上是对秦九韶《数书九章》的介绍与订正，虽然建树不多，但荜路褴褛，开辟草莱之功不没。

20 世纪初叶，日本人新城新藏对现存第一部中国古历《三统历》的上元积年进行了推算，其视野涉及木星会合周期，他利用刘歆所创岁星超辰说，按太初元年（公元前 104）前 11 月甲子日朔旦冬至，岁在星纪之次，以及"三统上元与太初元年岁名俱为丙子"

诸条件,列不定方程

$$N = 4617 \times p = 1728 \times q + (60n + x) \times 144/145$$

其中,N 为三统上元到太初元年积年,4617 为三统元法,1728 为三统岁星大周岁数,x 为小于 1 的分数,表示太初元年岁星所在位置,p,q,n 为待定整数。新城新藏据此推算,得一组答数

$$p = 31, q = 82, n = 20, x = 135/144$$

适与三统上元积年相合。[11]

20 世纪 70 年代末,李文林、袁向东著文讨论汉历上元积年计算,指出新城设法不合实际,其理由之一,认为假设三统上元岁名为丙子的前提是不妥的,同时新城没有利用《汉书律历志》所载(太初元年)"岁在婺女六度",致使未知量过多,设算滋繁。[12]李、袁按岁星超辰法及上述数据,列不定方程

$$4617 \times 145 \times p = 1728 \times q + r$$

其中,$N = 4617 \times p$,p、q 为待定整数,由"岁在星纪婺女六度"推得 $135 \leqslant r < 139$,由此得到最小正整数解

$$p = 31(q = 12\,010), r = 135$$

亦与三统上元相合。

他们还依据岁星超辰法,推算了古《四分历》、《东汉四分历》的上元积年,但均没有说明除岁星外的其他行星会合周期与交食周期是如何与其上元相配合的。

在中国古代历法中,可能与上元有关并相互独立的项目总计 12 项:日名、岁名、回归年、朔望月、恒星年、交点月(或交食周期,或交点年)、近点月、五星会合周期(木、火、土、金、水)。如果它们全部与上元有关,则可以列出 11 个联立的一次同余式,见式(2-1)。

前面提到,在上元积年计算方法上,存在着两种不同的观点,一种主张演纪术说,即按代入法次第求解同余式组,如开禧三年,大理评事鲍澣之声称:"至于李淳风、一行而后,总气朔而合法,效

乾坤而拟数，演算之法始加备焉。”①张敦仁认为“唐《麟德》以后……皆用纪术（演纪术）推求上元积年”，[9]朱文鑫亦称“唐宋历家皆以演纪法推积年”。[13]李继闵更是详细分析和论述了演纪术比之总数术在算法上的实用性及可行性。[7]

查唐宋历法，几乎均注有“演纪上元”字样，由于秦九韶所处时代，上元积年仍然施行，因而《数书九章》所陈“演纪之术”当不是无中生有，演纪术用于推算上元积年可谓证据确凿。

但是，按代入法，依次求解 11 个全部由天文数字构成的同余式，只消计算前三个方程即将上元基本确定（其模数基本上已超过上元积年数），其余同余式便不复有参与运算的机会，形同虚设。这恐怕算是演纪术说不得流行的原因之一吧。

大部分人士主张采用大衍总数术，这种方法早在公元 4 世纪的《孙子算经》中已具雏形，钱宝琮认为：

> 大约在三世纪中历法工作者开始应用剩余定理计算上元积年。我们认为《孙子算经》里“物不知数”问题解法不是作者的向壁虚造而很可能是依据当代天文学家的上元积年算法写出来的。[6]

由于总数术（即剩余定理）从总体上处理全部同余式，因而避免了演纪术所提出的问题，加之总数术本身理论完整、程序精炼，在中外数学史界备受青睐，故而总数术说不胫而走，流传广泛，深入人心，为众多天文学史或数学史论著所援引。

但是，总数术缺乏演纪术自行选择可用余数的功能，加之一次性同时处理众多的天文数据，具体运算中将成为难以克服的技术性困难，爰不得定论。李迪认为：

> 从《三统历》开始，在编制历法时都要设（求出）“上元积年”，有时候附加条件很多，不知如何计算……祖冲

---

①宋史律历志（卷 82）. 中华书局编. 历代天文律历等志汇编（8）. 北京：中华书局，1976. 2892。

> 之《大明历》中的上元积年……要解11个同余式的同余式组，不用说1500多年前，就是以今天的数学水平来看，解这样的同余式组也不是轻而易举的，古代怎样求上元积年，从数学史的角度来看，是个没有解决的问题。[14]

由于上元的存在，使得各项周期与之错综杂糅，彼此制约，倘不同时将与上元有关的历法项目做通盘考察，便难以解开上元积年之谜；而陷于求解11个同余式的泥淖之中挣扎求生，似乎又无法摆脱这个历史成见所形成的怪圈。

于是，迫使我们提出如下问题：究竟什么是确定上元的先决条件？凡是从上元起算的历法项目皆参与上元的推算吗？

二、积年数为什么越来越大

《东汉四分历》(85)以后400年间的10余部历法，积年数皆不过数万，这种平静的局面，被北魏张龙祥的《正光历》(518)率先打破，嗣后各历积年数不断加码，544年，梁虞门《大同历》的上元积年突破100万，727年，唐一行的《大衍历》骤然增至9000多万年，而后历家推演的积年数多徘徊于数千万年间，金朝杨级《重修大明历》(1127)终于将积年数越过界线演至380 000 000多年。

上元积年愈演愈烈的态势，被人们从两个方面加以疏解，其一，由于"天文观测的精密化，计算越来越繁重，求出的上元积年数字也越加庞大"；其二，由于追求理想上元之风日盛，"考虑的项目越多，解也越繁重"。[15]

在秦九韶的《数书九章》天时类问题中，无论按总数术还是演纪术推演的算例，均只以日名、岁名、回归年、朔望月为先决条件。在上元积年的推算中，除岁名外的其他三个条件必然参与运算，古代将这三个条件所确定的"十一月甲子日夜半合朔冬至"称为历元，对那些以甲子为上元岁名的历法，这四个条件必然全部是先决条件。

古代把岁名、日名、回归年与朔望月构成的大周期称为元法，

取一元复始之意。在废除闰周以前,各历的基本历法数据中多数列有这个项目,尤其在采用古章法 19 年 7 闰的历法中,无一遗漏。唐宋历法中,元法不再作为基本数据写入正文,但它依然存在,不过由于闰周的废除,它变得相当庞大,例如,据《大衍历》载,其元率(即元法,不包括岁名)为 16 374 592 200。

为行文方便,我们将上述四个条件构成的大周期称为元法,以 C 记之;除去岁名,所构成的周期称为准元法,以 C' 记之。

按同余式理论,由上述四个条件构成的同余式组的解,以 C 为模数,如果上元积年大于 C,则应该有其他的条件或原因参与上元的定夺;反之,说明仅凭这四个条件便基本上可以将上元确定。

为此,我们分两个时期,对历史上各部历法的元法 C(或准元法 C')与其积年数做一比较。

1. 闰周废除之前

唐《麟德历》以前的中国历法,在回归年与朔望月之间规定了一个简单的周期关系,叫闰周,令 p 个朔望月 $= q$ 个回归年,称 p 为章月,q 为章岁,于是

$$pu = qt$$

如果朔望月 $u = U/A$ 既定,通过闰周 $\{p, q\}$,回归年 $t = T/B = pU/qA$ 同时确定;反之亦然。通常历法家将 A 称为日法,B 称为纪法。一般说来,我们有

$$(T,B) = 1 \text{ 及 } q \mid B$$

一纪岁 $= B$ 年 $= pB/q$ 个整朔望月,回归年与朔望月的余分皆为零;$C' = \dfrac{60B}{(60,T)}$年之内,不仅岁分、月分俱终,日名亦复如初,是为准元法;$C = \dfrac{60C'}{(60,C')}$年之内,实现日名、岁名、回归年与朔望月之大轮回,是为元法。因为 $(T,B) = 1$,故有

$$C = \frac{60C'}{(60,C')} = \frac{60B}{((T,60),B)} = 60B$$

考查《麟德历》以前的 22 部历法，只有六部历法的积年数超过了它们的准元法 C'（它们的上元岁名全部不是甲子），这说明这些历法上元的确定必然包含了日名、回归年、朔望月以外的因素。我们可以肯定至少岁星参与了《三统历》上元的推算；《东汉四分历》与《乾象历》上元含有各自交食周期的因素；《元嘉历》凭空多出一元 C，实属人为忝列，意在扩大其积年数；《黄初历》已佚，情况不明；《戊寅元历》或许是掺入了水星或土星的会合周期，导致其积年数突破准元法 C'。

使积年数超出元法的历法，多集中于早期，这表明在采用闰周的历法当中，虽然从《乾象历》开始上元所包罗的项目便不断增加，至祖冲之《大明历》而达到完备，但它与上元积年呈明显递增的趋势无必然联系，诱发积年数上涨的根本原因，是祖冲之以后的历法，革除古章法，扩充闰周，导致纪法 B 的增加，从而引起元法 C 或准元法 C' 的膨胀。

2. 闰周废除之后

唐李淳风在其《麟德历》中废除闰周，将回归年与朔望月统一在同一法度之下，使得历取回归年与朔望月常数从彼此的约束中解脱出来，赢得了相对的独立。但是，由于回归年 $t=T/A$ 与朔望月 $u=U/A$ 皆为一有限的分数，尽管在各自的取值上较之以前有更多的自由度，它们之间仍然存在着一个共同的大周期，只不过不太明显且庞大得多而已。

假设 N_n 表示公元 n 年距上元积年，对于闰周废除之后的历法，按日名、岁名、回归年、朔望月等四个条件，可列如下同余式组

$$N_n \equiv R_0 \pmod{60} \tag{2-8}$$

$$TN_n \equiv R_1 \pmod{60A} \tag{2-9}$$

$$TN_n \equiv R_2 \pmod{U} \tag{2-10}$$

其中，式(2-10)有解的充要条件为：$(T,U)\mid R_2$，其通解为

$$N_n = f(R_2) + \frac{Um}{(T,U)}$$

代入式(2-9),则有

$$\frac{TUm}{(T,U)} \equiv g(R_1,R_2)\,(\mathrm{mod}60A)$$

上式有解的充分必要条件为

$$\left(60A,\frac{TU}{(T,U)}\right) \mid g(R_1,R_2)$$

联立式(2-9)、式(2-10),得其通解为

$$N_n \equiv f(R_1,R_2)\,(\mathrm{mod}C')$$

其中

$$C' = \frac{60AU}{(TU/(T,U),60A)(T,U)}$$

是为准元法。如果取 $C = \frac{60C'}{(60,C')}$,则同余式组的通解必为

$$N_n \equiv f(R_0,R_1,R_2)\,(\mathrm{mod}C)$$

此处所取元法 C 与准元法 C' 与前述意义相同。

由于闰周的剔除,使得 T 与 U 不再拥有巨额公因子,从而导致 C 与 C' 急剧增大,伴随而来的结果是上元积年的突飞猛进。对《麟德历》以后 31 部历法的上元积年与其各自元法或准元法进行分析,发现只有吴昭素的《乾元历》(981)积年数突破元法 C,其余皆不出 C 或 C' 之范围。

这同样说明上元积年愈演愈烈,与参与上元事项愈来愈多无因果关系。虽然我们尚不能据此断言,仅凭这四个条件,即将上元唯一确定,但却为我们的猜想化为现实找到了希望之光。

南北朝以来,上元积年与元法同步伸张,而元法的变迁根植于回归年与朔望月表达方式的衍化,这一切与历法中的其他项目似乎没有关系。

通过前面的分析,我们得出的结论是:仅凭日名、岁名、回归年、朔望月四项基本条件,几乎可以推出每一部历法的上元,为了将这种可能性提高到必然性,彻底排除其他历法项目参与上元推

算的机遇，需要进一步算理上的结论。

三、哪些常数参与了上元的推算

按同余式理论，不是每一组余数(R_0,R_1,R_2)都能够保证同余式组有解，上一节构造的命题已经证明，当余数在给定的空间内任意取值，无论采用总数术还是任何一种次序的代入法求解同余式组，其解集合的元素都是一致的。与前面的讨论相对应，我们仍以《麟德历》为分水岭，就两个不同的时期，对余数R_1、R_2进行适当的限定，具体判别历史上各部历法的四项基本条件构成之同余式组的解集合情况。

1. 闰周废除之前

据现有史料，历史上最先采用数学手段精测冬至时刻R_1的人是南北朝的祖冲之，由于我们的讨论基于对余数R_1与R_2选择范围之前提，因此只考察祖冲之《大明历》以后的情形。① 我们分两种情况讨论。

(1)上元岁名为甲子。由于闰周$\{p,q\}$的存在，使得回归年$t=T/B$与朔望月$u=U/A$彼此不能独立：$qt=pu$。因为$q\mid B$，$(p,q)=1$，所以

$$(AT,BU)=\frac{BU}{q}=\frac{TA}{p}$$

于是由式(2-1)的前三个同余式构成的同余式组，即可等价地变换为如下的同余式组

$$N_n=R_0+60m \qquad (2\text{-}11)$$

$$TN_n\equiv R_1(\bmod 60B) \qquad (2\text{-}12)$$

$$pN_n\equiv R_2(\bmod q) \qquad (2\text{-}13)$$

①《大明历》以前的历法多采用古章法19年7闰制，以特别的方式推算上元，有关的例子，见本章第三节。

其中，$R_1=r_1B$，$R_2=r_2q/u$，分别以 B、BA 为一日分数的整值。假定 R_1、R_2 的取值区间长度分别为 S_1、S_2，将式(2-11)代入式(2-12)，有

$$60Tm \equiv R_1 - R_0T(\mathrm{mod}60B)$$

因为$(T,B)=1$，所以，上式有解的充分必要条件为：$60 \mid R_1 - R_0T$，由于 R_0 不可调整，所以，R_1 的可用值区间长度将不超过

$$S_1^* = [S_1/60] + 1$$

令 $$R_1^* = (R_1 - R_0T)/60$$

由 T、B 求得乘率 k，使 $$kT \equiv 1(\mathrm{mod}B)$$

于是有 $$m \equiv kR_1^*(\mathrm{mod}B)$$

代入式(2-11)，有

$$N_n = R_0 + 60kR_1^* + 60Bm^*$$

代入式(2-13)，有

$$60Bpm^* \equiv R_2 - pR_0 - 60pkR_1^*(\mathrm{mod}q)$$

因为 $q \mid B$，所以上式化为

$$60pkR_1^* \equiv R_2 - pR_0(\mathrm{mod}q)$$

因为$(k,q)=1$及$(60pk,q)=(60,q)$，令 $R_2^*=\dfrac{R_2-pR_0}{(60,q)}$，于是有

$$\frac{60pk,}{(60,q)}R_1^* \equiv R_2^*\left(\mathrm{mod}\,\frac{q}{(60,q)}\right)$$

其中，R_2^* 的可用值区间长度将不超过

$$S_2^* = \left[\frac{S_2}{(60,q)}\right] + 1$$

上面的同余式等价于如下同余方程

$$\frac{60pk}{(60,q)}x_1 \equiv x_2 + y\left(\mathrm{mod}\,\frac{q}{(60,q)}\right) \qquad (2\text{-}14)$$

其中，$0<x_1<S_1^*$，$0<x_2<S_2^*$，y 为一常数。

由于祖冲之发现了测算冬至时刻的方法，从而为提高余数 R_1 与 R_2 的取值精度提供了客观条件。如果我们把 R_1 与 R_2 的取值

范围限定在正负一个时辰，即 1/6 日以内，由于

$$R_1 = r_1 B, R_2 = r_2 q/u$$

所以 R_1 与 R_2 的取值长度分别为

$$S_1 = B/6, S_2 = q/6u$$

于是 R_1^* 与 R_2^* 的取值区间分别为

$$S_1^* = [S_1/60] + 1 = [B/360] + 1$$

$$S_2^* = \left[\frac{S_2}{(60,q)}\right] + 1 = \left[\frac{q}{6u(60,q)}\right] + 1$$

我们可以具体求出 S_1^*、S_2^*、k，通过考查式(2-14)，可以判定由式(2-11)～式(2-13)构成的同余式组之解集合中元素个数的上限。

(2) 上元岁名不为甲子。对于不以甲子为上元岁名的历法，我们只需讨论式(2-12)与式(2-13)联立的同余式组。因为$(60B, T) = (60, T)$，所以式(2-12)有解的充要条件为：$(60, T) \mid R_1$，令 $R_1^* = \frac{R_1}{(60,T)}$，则 R_1^* 的可取值长度为

$$S_1^* = \left[\frac{S_1}{(60,T)}\right] + 1$$

求得乘率 k，使

$$\frac{kT}{(60,T)} \equiv 1\left(\bmod \frac{60B}{(60,T)}\right)$$

则有

$$N_n = kR_1^* + \frac{60B}{(60,T)} \times m$$

代入式(2-13)，得

$$\frac{60pBm}{(60,T)} \equiv R_2 - pkR_1^* \pmod{q}$$

因为 $q \mid B$，于是上式化为

$$pkR_1^* \equiv R_2 \pmod{q}$$

因此，$(pk, q) = 1$，所以 R_2^* 的取值长度不超过

$$S_2^* = [S_2] + 1$$

上面的同余式等价于

$$pkx_1 \equiv x_2 + y(\bmod q) \tag{2-15}$$

其中，$0 < x_1 < S_1^*$，$0 < x_2 < S_2^*$，y 为一常数。如果我们仍然把 R_1 与 R_2 的取值范围限定在正负一个时辰，即 $S_1 = B/6$，$S_2 = q/6u$，于是 R_1^* 与 R_2^* 的取值区间分别为

$$S_1^* = \left[\frac{B}{6(60,T)}\right] + 1, S_2^* = \left[\frac{q}{6u}\right] + 1$$

我们同样可以通过对式(2-15)解集合的讨论，来说明由式(2-12)与式(2-13)联立的同余式组的解集合中元素个数的上限。

我们对《大明历》到《戊寅历》的12部历法逐一演算的结果表明，即使将 R_1 与 R_2 的误差放宽到正负一个时辰的程度，仍然不能保证所有的历法由式(2-11)～(2-13)联立的同余式组皆有解。具体结果是，在8部采用甲子为上元岁名的历法中，按同余式组式(2-11)～(2-13)推求上元，《大明》、《兴和》、《大同》、《天保》、《孝孙》等历法的上元都是唯一的选择；《开皇》与《皇极》两历最多只有2解；《大业历》最多只有3解。而《正光》、《天和》、《大象》、《戊寅元》等其余四历，都没有选择甲子为上元岁名，它们按式(2-12)与式(2-13)构成的同余式组推求上元，解集合中元素个数的上限依次为6，30，6，4。

一味扩展 R_1 与 R_2 的取值空间，则与治历精神相悖，对于企图选择甲子为上元岁名的历法，往往要经过多次试验，不断调整基本数据，方能取得合用上元，因而推求上元本身，提供了调日法滋长的温床。如果不将 R_1 与 R_2 的误差定得过宽（如我们假定的那样），且调日法屡试不中，便只好退而求其次，放弃上元岁名为甲子的条件。

2. 闰周废除以后

《麟德历》(664)以后统一回归年与朔望月之法度，由日名、岁

名、回归年 $t=T/A$、朔望月 $u=U/A$ 构成的同余式组可表示如下

$$N_n \equiv R_0(\bmod 60) \tag{2-16}$$

$$TN_n \equiv R_1(\bmod 60A) \tag{2-17}$$

$$TN_n \equiv R_2(\bmod U) \tag{2-18}$$

其中,R_0 为岁名序号,不可调整;R_1 与 R_2 分别是以日法 A 为一日分数之整值,令其取值区间长度分别为 S_1 与 S_2,我们希望知道 R_1 与 R_2 在给定区间内任意取值,上面的同余式组的解集合中元素个数的上限。不难证明,式(2-16)～式(2-18)构成的同余式组有解的充要条件为

$$60(A,T)\mid(R_1-R_0T),(60T,U)\mid(R_2-R_0T)$$

$$(60A,U)\mid(R_1-R_2)$$

若依中国剩余定理求解之,则首先须令余数 R_1 与 R_2 满足上述条件。不过,由于我们已经证明在 S_1 与 S_2 一定,同余式组的解集合中元素个数与求解方式之不同无关,因此,我们按代入法次第求解上面的同余式组,结果将不失一般性。将式(2-16)化为$N_n=R_0+60m$,然后代入式(2-17),有

$$60Tm \equiv R_1-R_0T(\bmod 60A) \tag{2-19}$$

上式有解的充要条件为:$60(A,T)\mid(R_1-R_0T)$,令 $R_1^*=\dfrac{R_1-R_0T}{60(A,T)}$,

则其取值区间长度不超过

$$S_1^*=\left[\frac{S_1}{60(A,T)}\right]+1$$

将式(2-19)的通解

$$m=f(R_0,R_1)+\frac{Am^*}{(A,T)}$$

代回式(2-16),再代入式(2-18),得

$$\frac{60ATm^*}{(A,T)} \equiv R_2-R_0T-60Tf(R_0,R_1)(\bmod U)$$

上式有解的充要条件为

$$R_2^* = \frac{R_2 - R_0T - 60Tf(R_0,R_1)}{(60AT/(A,T),U)}$$

为整数。令 R_2^* 的取值区间长度不超过

$$S_2^* = \left[\frac{S_2}{(60AT/(A,T),U)}\right] + 1$$

由此即得,由式(2-16)~式(2-18)构成的同余式组的通解必为如下形式

$$N_n \equiv f(R_0,R_1,R_2)(\mathrm{mod}C)$$

其中
$$C = \frac{60AU}{(A,T)(60AT/(A,T),U)}$$

即上一节所说之元法;$f(R_0,R_1,R_2)$为以 R_0、R_1、R_2 为整系数的多项式。依平均而论,同余式组式(2-16)~式(2-18)有解的个数应为

$$N = \frac{S_1 \times S_2 \times C}{60^2AU}$$

我们将 R_1 与 R_2 的取值范围控制在正负一刻,即 0.02 日以内,并且对积年数 N_n 限定在一亿年以内为合用解,于是问题化为:当 $S_1 = S_2 = 0.02A$, $N_n < 10^8$ 时,同余式组式(2-16)~式(2-18)的解集合中之元素个数的上限是多少?

由于依平均而论分布在区间[0, $C-1$]的 N 个解中,只有使 $N_n < 10^8$ 者方为合用,于是,按概率计算,满足 $S_1 = S_2 = 0.02A$, $N_n < 10^8$的解应为

$$\frac{10^8N}{C} = \frac{10^8 \times (0.02A)^2}{60^2AU} = \frac{10^2}{9u} \approx \frac{3}{8}$$

就是说,对于同余式组式(2-16)~式(2-18),在 $S_1 = S_2 = 0.02A$, $N_n < 10^8$ 之条件下,可能取得一个合用解的概率仅为 3/8。

实际上,这个同余式组解的数目之具体范围是

$$(S_1^* - 1)(S_2^* - 1) \leqslant N \leqslant S_1^* S_1^*$$

如果我们假定这些解在区间[0, $C-1$]上均匀分布,则满足 $S_1 = S_2 = 0.02A$, $N_n < 10^8$ 的解的个数最多不超过

$$\frac{10^8 S_1^* S_2^*}{C}=\frac{10^8\times\left[\frac{0.02A}{60(A,T)}+1\right]\times\left[\frac{0.02A}{(U,60AT/(A,T))}+1\right]}{C}$$

按这个估计式,对《麟德历》以后的32部历法的情况逐一进行演算,结果表明,对于同余式组式(2-16)~式(2-18),其中21部历法最多只有一个合用解,亦即他们的上元被这个同余式组唯一确定,占总数的2/3。其中使同余式组最多有2个合用解者5部,不超过4解者4部。《明天历》与《占天历》各最多可有15个可用解。

至此我们可以说,对大部分历法来讲,仅以日名、岁名、回归年与朔望月四项基本先决条件,即将上元唯一确定,从而表明在这些历法中与上元有关的其他历法项目(如恒星年、五星会合周期、交点月、近点月等),已不具备参与推算上元的必要条件。

因而,调整自己以附会上元,成为其他历法事项与上元协调的必由之路,别无选择。

四、上元算法存在严重的附会现象

从理论上推断,近点月等其他历法项目多不具备先决条件之资格,积年之法因而存在严重的附会现象,杜预称之"为合以验天",此乃上元积年的弊端所在,李谦评论"盖天道自然,岂人为附会所能苟合哉"。①

积年之法,滥觞于刘歆《三统历》,后世更历者,皆以正元为治历首要。所谓"造历之法,必先立元,元正然后定日法,法定然后度周天以定分至,三者有程,则历可成矣。"②

上元积年虽如此重要,积年之法却不曾见诸史志,现今人们唯一能据为凭证的史料,是宋代秦九韶的《数书九章》,从中多少可

---

①元史历志(卷53). 中华书局编. 历代天文律历等志汇编(9). 北京:中华书局,1976,3357~3358。

②宋史律历志(卷74). 历代天文律历等志汇编(8). 2633。

以窥探一些唐宋历法家推演上元的历史原貌。

在前面的讨论中，我们按照秦九韶演纪术所规定的四个先决条件，对历史上各种类型的演算方法进行分析，结论是单凭这几个条件，即将多数历法的上元积年完全确定，从而迫使我们选择其他历法项目附会既定上元的出路，对此，历史文献上有何记录呢？

杨伟《景初历》(237)之前，各历所有历法项目皆起于上元，杨伟破天荒给交食周期与月行迟疾设置交会差率与迟疾差率，使之游离于景初上元之外，从而大幅度地提高了近点月的精度。何承天《元嘉历》(443)，更将五星会合周期各立“后元”，使元嘉上元的内涵简约到最低限度，同时将东汉以来数百年间徘徊乃至倒退的五星会合周期精度大大提高。对此，祖冲之评论道：

> 算自近始，众法可同，但《景初》之二差，承天之后元，实以奇偶不协，故数无尽同，为遗前设后，以从省易。①

明确指出杨伟、何承天之举系出于无奈，何承天对此似不以为然，他说：

> 《虞书》著钦若之典，《周易》明治历之训，言当顺天以求合，非为合以验天也。汉代杂候清台，以昏明中星，课日所在，虽不可见，月盈则蚀，必当其冲，以月推日，则躔次可知焉。舍易而不为，役心于难事，此臣所不解也。②

“顺天以求合”，系指采用实际精测的历法数据，不经篡改修正，直接用以推算；“为合以验天”，意即以实测数据为参照，调整选择与之相近的历法数据，来配合既定上元，由于日月食的推算要起于上元，故需要“为合以验天”；如果立交会差率，以“昏明中星，课日所在”，直接入算，则不仅精确而且省易，何承天对上元积年计算中那种“舍易而不为，役心于难事”的旧习，表示了遗憾。实

①宋书律历志(卷13). 中华书局编. 历代天文律历等志汇编(6). 北京：中华书局，1976，1770。

②宋书律历志(卷12). 历代天文律历等志汇编(6). 1715。

际上“为合以验天”一语，出自更早的杜预之口：

当阳侯杜预著《春秋长历》，说云：“《书》所谓‘钦若昊天，历象日月星辰’，《易》所谓‘治历明时’，言当顺天以求合，非为合以验天者也。”①

李谦在《授时历议》中写道：

晋杜预有云：治历者，当顺天以求合，非为合以验天。前代演积之法，不过为合验天耳。②

明确指出推演上元的方法存在“为合验天”现象。何承天至李谦之间800余年中，鲜有傥言指责这种现象者，其原因在于各治历家无不潜心构算，努力使七曜并发上元，自然不便对自己的追求进行非议。在关于积年之法的论述中，《元史历志》称：

汉刘歆作《三统历》，始立积年日法，以为推步之准。后世因之，历唐而宋，其更元改法者，凡数十家，岂故相为乖异哉？盖天有不齐之运，而历为一定之法，所以既久而不能不差，既差则不可不改也。

……二十年，诏太子谕德李谦为《历议》，发明新历顺天求合之微，考证前代人为附会之失，诚可以贻之永久，自古及今，其推验之精，盖未有出于此者也。③

新历，系郭守敬之《授时历》，李谦应召作《授时历议》，一者验明《授时历》废除积年日法之后“顺天求合”的进步所在，同时“考证前代人为附会之失”，如此率直文字，绝无仅有。另外，上述文字将导致历史上频繁更历的原因，归咎于一成不变的积年之法之常规手段。李谦在《授时历议》中写道：

昔人立法，必推求往古生数之始，谓之演纪上元。当

①晋书律历志(卷18)．中华书局编．历代天文律历等志汇编(5)．北京：中华书局，1976．1645～1646。

②元史历志(卷53)．历代天文律历等志汇编(9)．3358。

③元史历志(卷52)．历代天文律历等志汇编(9)．3299～3300。

斯之际，日月五星同度，如合璧连珠然。惟其世代绵远，驯积其数至逾亿万，后人厌其布算繁多，互相推考，断截其数而增损日法，以为得改宪之术，此历代积年日法所以不能相同者也。然行之未远，浸复差失，盖天道自然，岂人为附会所能苟合哉。①

在这里，李谦再次强调了前代历法"行之未远，浸复差失"的原因，是出自上元推算中的人为附会现象，同时，对历代积年日法之所以各不相同，提出了精辟的见解。

在前一节演纪积年解集合的讨论中我们看到，每给定一个日法 A，同余式组式(2-16)～式(2-18)可以取得小于1亿年的解的概率不足3/8，所以，该同余式组的解"至逾亿万"，并不少见。由于治历者对大于亿年的积年数在布算或附会的过程中皆感到不便，因此要求其解集合中凡大于一亿者为不合用，于是，不得不多次调整日法，反复推考，"断截其数"，以保证这个同余式组取得合用解，调日法因而不废。

通览史志，有关具体记述近点月等其他历法项目调整附会的文字尚不多见。据《宋书律历志》记载：

然而洪之迟疾，不可以检《春秋》，伟之五星，大乖于后代，斯则洪用心尚疏，伟拘于同出上元壬辰故也。②

如果说这段话对刘洪《乾象历》之近点月的附会现象尚有些隐讳其辞，那么对杨伟《景初历》五星会合周期的人为痕迹，则揭露无遗。一行在《大衍历议》中写道：

何承天反覆相求，使气朔之母合简易之率，而星数不得同元矣。李业兴、宋景业、甄鸾、张宾欲使六甲之首众

---

①元史历志(卷53). 历代天文律历等志汇编(9). 3357。

②宋书律历志(卷12). 历代天文律历等志汇编(6). 1685。

术同元，而气朔余分其细甚矣。①

何承天《元嘉历》设数极简，按理应利于积年演算。但欲使元嘉五星俱起上元，则其精度将与其积年数的大小相关，同时五星会合周期数据的选择亦直接依赖于积年数的大小，于是欲使五星配合上元，则无法使精度与历法数据简约两全，故而其"星数不得同元矣"。

李业兴《兴和历》、宋景业《天保历》、甄鸾《天和历》、张宾《开皇历》，所取纪法 B 与日法 A 皆相当庞大，即"气朔余分其细甚矣，"这是由于他们的历取近点月、半交点年（《开皇历》取交食周期）与五星会合周期常数分别以 A 或 B 为其法度，其各项数据之精度皆不理想，近点月与半交点年尤其粗劣。如果这些项目参与了各自上元的推算，绝无扩充其法度 A 或 B 的道理。李业兴等人这样做唯一合理的解释，便是在附会上元调整数据的过程中，由于法度 A 或 B 的庞大，尽量使误差减少。

凡此种种，无不说明上元推算中其他历法项目经过调整以附会既定上元之现象的普遍实在性。

五、中国古代的天文常数系统

在天体力学中，由于所有实测的天文常数并不能保持完全自洽，因此，对于任意给定的动力系统，需要先确定一些定义常数与基本常数，然后，再通过这个系统，将其他有关的天文常数推导出来，后者即称为导出常数。由定义常数、基本常数、导出常数构成的集合，即被称为一个天文常数系统。

近现代天文学的第一个天文常数系统是由纽康（Simon Newcomb，1835～1909）于1896年提出的。国际天文学联合会有一个专门的委员会，负责天文常数系统的修订。②

---

①新唐书历志（卷27上）．中华书局编．历代天文律历等志汇编（7）．北京：中华书局，1976．2179。

②［苏］K．A．库里柯夫．新天文常数系统．吴守贤译．北京：科学出版社，1979。

过去人们认为，中国古代历法中的天文常数应是根据实测值选取的结果，它们彼此之间是相互独立的，因此，不存在所谓的“常数系统”。

通过上面的理论分析，我们可以发现，在中国传统数理天文学中，围绕着上元积年的计算，确实存在着一个天文常数系统。这个系统中的基本常数，是历取朔望月与回归年。历法中的其他天文周期，如恒星年、近点月、交点月、五星会合周期等，都是导出常数。

对于中国古代的历法家来说，编制历法的第一步，就是构建这个天文常数系统，其基本程序可如图 2-3 所示。

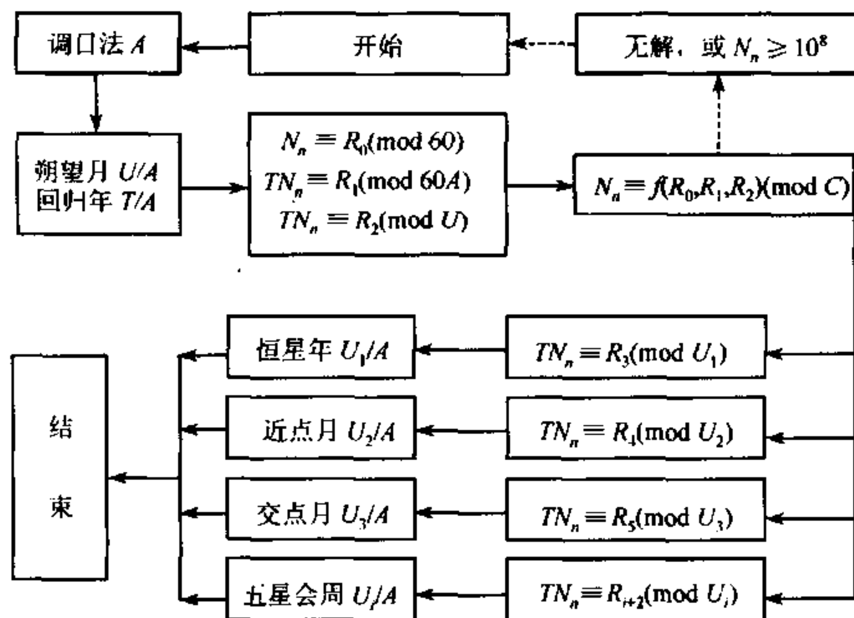


图 2-3　中国古代的天文常数系统

首先，按何承天调日法算法，调取合适的日法 A，由此可以得到历取朔望月与回归年常数。根据这两个基本常数，布列一个以上元积年为未知量的同余式组，如果这个同余式组无解，或者所得上元积年 $N_n \geq 10^8$，就表明这组历取朔望月与回归年常数不合用，本轮计算无效，需要重新调取日法，确定新的历取朔望月与回归年常数，再列同余式组进行新的计算。

若所得结果满足 $N_n<10^8$，说明这个上元可用。然后，根据这个既定的上元积年，分别调取其他历法常数，如恒星年、近点月、交点月、五星会合周期等，使这些导出常数的历取值可与既定上元相配合。万一在规定的精度范围内，无法调取合适的导出常数，原则上仍然需要重新调取日法，选择新的基本常数，计算新的上元积年。

可以说，图2-3清楚地展现了中国传统历法的构造机理。本章后面的三节，将通过具体的实例，进一步证明我们所重构的古历天文常数系统，并在下一章，利用这个常数系统理论，修复或复原历史上一些已经失传或者残缺的历法的天文常数。

第三节　早期历法的上元积年计算

元代郭守敬《授时历》(1280)以前，几乎所有的治历者都围绕着若干天文常数确定的某个"上元"来编排其历法，由于绝大多数历法中的所有历法事项悉数从上元起算，因此，选择合适的上元便成为治历者一项艰巨而重要的任务。

许多天算史家认为，凡从上元起算的历法事项，都应该参与其上元的推算，所以这个上元与随意选择之普通的历法起算点并无本质上的差别，因而对于历法的编制除了徒添烦乱之外不产生任何实质性的影响，故此天文学史家们在研究中国古历时通常对于上元的存在不予理会或深究。

根据上一节的讨论，我们通过对历史上50余部现存历法的系统考察与算理分析，从理论上证明了上述假想是不能成立的，结论是对于绝大多数历法的上元，仅凭日名、岁名、回归年与朔望月等四项先决条件即将其唯一确定，其他许多基本天文周期(如交点月、近点月与五星会合周期等)多不具备参与其上元推算的资格。

由此可见上元的存在并非是一种无关宏旨的文化现象，弄清楚它的来龙去脉，可以说是理清中国古历之天文常数系统的必由之路。本节，我们将具体讨论南北朝以前采用19年7闰制的历法

是如何确定其上元积年的。

一、上元与历取天文常数的三种关系

对于早期的历法，由于闰周的存在，使得基本常数回归年与朔望月彼此不能独立，演纪上元的算法模型尚未成熟，因此，需要比较细致地论述和判定上元与所有历取天文常数的关系。事实上，就历取天文常数来说，不外乎下列三种情况：

甲、与上元无关（即不从上元起算）；

乙、从上元起算并参与上元的确定；

丙、从上元起算但不参与上元的推算。

对于甲类数据，如《景初历》近点月所设迟疾差率，《元嘉历》五星会合周期各立后元等，均脱离其各自上元之约束，基本上是实测值的分数表示，能够反映当时天文观测的实际水准。

乙类数据，都是最基本之历法常数，它们在选定上元的同时，已然构筑了整部历法的框架。由于此类数据皆先上元而定，倘在推算上元的过程中不出意外，通常历取值应为当时客观认识的最佳有理（分数）选择。甄别这些数据的一个方法，就是利用它们将其上元具体推算出来。

如果我们认定所有与上元有关的历法事项都必然参与了上元的推算，就不存在丙类数据了。可惜诚如我们前面指出的那样，事实并非如此。我们可以通过鉴别甲、乙类数据，来筛选丙类历法常数。

在甄别出丙类常数之后，还必须弄清楚它们的来源，即考察这些天文周期是如何与既定上元相配合的，正因为如此，才使得我们对古历上元积年的研究上升到一个更高的层次。因为，许多天文周期的历取值（诸如五星会合周期等）往往不得不为了附会某个既定的上元而进行调整选择，这一现象导致的严重后果是：由不断更替的历法中的历取数据所点缀的各项天文周期精度的变迁，可能并非客观演化的真实反映！

因此,对古历上元积年的考察,或者说对两类数据的甄别,不仅具有重要的历史价值,而且具有不容忽视的现实意义。

在早期的历法中,古六历及《三统历》在上元的选择与历法常数的设置方面与后来的历法均存在较显著之差异,虽然有新城新藏、李文林与袁向东等学者的工作在先,但是,按上述天文常数的三类划分,仍然有一些问题有待清理。

我们曾对东汉至刘宋时期采用古章法(19 年 7 闰)的历法之上元推求的一般模式给出一个概括,[16]并且对此间一些历法五星会合周期附会其既定上元的方式及误差控制进行了较为详细的论述。[17]本节将在此基础上,进一步全面地讨论《东汉四分历》、《乾象历》、《景初历》等三部历法的上元积年究竟是如何推算出来的。

二、《东汉四分历》上元积年计算

《东汉四分历》(85)为编訢、李梵所造,①用以取代刘歆之《三统历》(公元前 104)。② 这部历法恢复了古六历的基本常数,定

$$回归年 = 365\frac{1}{4}日,朔望月 = 29\frac{499}{940}日$$

取日名、回归年与朔望月共同的周期为纪法 $C' = 1520$;命岁名与纪法 C'的共同周期为元法 $C = 4560$,意即历经 4560 年之后,日分与月分复俱为零,日名与岁名亦与上元之始相同。

从《东汉四分历》上元起算的历法事项共 9 条:日名、回归年、朔望月、交食周期及五星会合周期。《东汉四分历》沿袭了《三统历》的交食周期,以 135 个朔望月有 23 次食,或 513 个回归年发生 1081 次食。按前三项所推历元在汉文帝后元三年(公元前 161),称为四分仲纪之元。四分仲纪之元相当于近距历元,它是如何得

①续汉书律历志(志第三). 历代天文律历等志汇编(5). 1512~1536。

②汉书律历志(卷 21 下). 历代天文律历等志汇编(5). 1417~1436。

出的呢？据《续汉书律历志》记载：

> 自太初元年始用《三统历》，施行百有余年，历稍后天，朔先[于]历。……至元和二年，《太初》失天益远，日、月宿度相觉浸多，而候者皆知冬至之日日在斗二十一度，未至牵牛五度，而以为牵牛中星，后天四分日之三，晦朔弦望差天一日，宿差五度。章帝知其谬错，以问史官，虽知不合，而不能易，故召治历编訢、李梵等综校其状。①

上述文字表明，章帝元和二年(85)经测定知《三统历》回归年后天 0.75 日，汉章帝命编訢、李梵更造新历，旨在弥补此误差。因为《三统历》与《四分历》一个朔望月长度差为

$$29\frac{43}{81}-29\frac{499}{940}=\frac{1}{81\times940}\text{日}$$

《三统历》一元 $C=4617$ 年内共有朔望月数为

$$4617\times\frac{235}{19}=81\times705\text{ 月}$$

所以，在 4617 年内，《三统历》与《四分历》相差恰为

$$\frac{81\times705}{81\times940}=\frac{3}{4}\text{日}$$

由于《四分历》元法 $C=4560$ 接近《三统历》一元之数，如果将《三统历》近距历元太初元年(公元前 104)前移 4617 年，定为《东汉四分历》的一个历元(即公元前 4721 年)，则由此得其近距历元为 4721 − 4560 = 前 161 年，是为后元三年。如此即可保证《四分历》纠正《三统历》的历法后天现象。

由于《四分历》元法为 $C=4560$，在推算近距历元时径与《三统历》元法 4617 相配合，故在确定公元前 161 年为其近距历元之后，当年距《东汉四分历》上元积年必为 $N_{-161}=4560m$ 年。

是什么因素最终确定了 m 呢？我们的计算结果表明，《四分

---

①《续汉书律历志》(志第二)．历代天文律历等志汇编(5)．1479～1480。

历》交食周期参与了最后的选择。据《续汉书律历志》载：

> 《太初历》推月食多失。《四分》因《太初》法，以河平癸巳为元，施行五年。永元元年，天以七月后闰食，术以八月。①

《太初历》即《三统历》。按河平癸巳（公元前28）为交食周期之元，该年距后元三年133年，故距《东汉四分历》上元积年为

$$N_{-28}=133+4560m$$

因《四分历》交食周期取513年1081次食，令

$$133+4560m\equiv r(\bmod 513) \qquad (2\text{-}20)$$

因为(4560,513)=57，欲保证式(2-20)有解，必使：$57\mid r-133$，从而可知$r=0$时式(2-20)无解。此即意味着将公元前28年定为《四分历》历注交食周期之元是不可能的。于是，不得已，只能退而求其次，择其近者而从之，令$r=19$，即取公元前47年为《东汉四分历》交食周期近距之元，于是式(2-20)化为

$$80m\equiv -2(\bmod 9)$$

解之，得

$$m\equiv 2(\bmod 9)$$

取最小正整数$m=2$，则有后元三年（前161）距《东汉四分历》上元积年

$$N_{-161}=4560\times 2=9120\text{年}$$

由于《东汉四分历》"从上元太岁在庚辰以来尽熹平三年，岁在甲寅，积九千四百五十五岁"。熹平三年（174）距后元三年（前161）335年（算尽），所以熹平三年距东汉四分上元积年为

$$N_{174}=335+9120=9455\text{年}$$

合问。而据《汉书天文志》载：

> 十一月乙卯，月食填星，星不见，时在舆鬼西北八九尺所。占曰："月食填星，流民千里。"河平元年三月，流

①续汉书律历志（志第二）. 历代天文律历等志汇编(5). 1494。

民入函谷关。[①]

按《东汉四分历》135 个朔望月发生 23 次交食，因而 235 个朔望月（一章）当有

$$\frac{235\times23}{135}=40+\frac{5}{135}\text{次食}$$

又每月平均次食为$\frac{23}{135}>\frac{5}{135}$，故依《四分历》推月食法，以公元前 47 年为月食历元，则 19 年（一章）之后，河平元年（公元前 28）前 11 月亦将属月食发生之月，适将当年月食推出。

至此，我们依据日名、回归年、朔望月及交食周期等四项先决条件，即将《东汉四分历》上元唯一确定。这一结果同时表明，《东汉四分历》历取五星会合周期常数当属丙类数据，均已不复具备参与其上元推算之资格。

三、《乾象历》上元积年计算

《乾象历》是东汉刘洪大约在公元 174～184 年间修成的一部历法，以取代行用百余年之《东汉四分历》，于公元 223～280 年间颁行于三国孙吴。[②] 这部历法首次引入了近点月计算，从而使与乾象上元有关之历法事项增至 10 条：日名、回归年、朔望月、交食周期、近点月、五星会合周期。《乾象历》依然采用 19 年 7 闰之古章法，取

$$t=365\frac{145}{589}\text{日}$$

为其回归年长度，将日名、回归年及朔望月共同的周期称为乾法 $C'=1178$，交食周期为 893 个回归年内共 1882 次食。

由于《乾象历》为订正《东汉四分历》之作，且当时“学者务追

①汉书天文志（卷 26）．历代天文律历等志汇编（1）．104。

②《乾象历》收录在：晋书律历志（卷 17）．历代天文律历等志汇编（5）．1585～1613。

合《四分》"(东汉徐岳语),[①]因此,后元三年(前161)作为《四分历》仲纪之年,刘洪必设法确保其新历在公元前161年前11月甲子日朔旦冬至。据此有后元三年距乾象上元积年 $N_{-161}=19m$,及如下同余式

$$tN_{-161} \equiv \frac{r}{589} (\mathrm{mod}\ 60)$$

其中,$0 \leqslant r < 589$。将 $N_{-161}=19m$ 代入上式,化简之

$$41m \equiv \frac{r}{30 \times 19} (\mathrm{mod}\ 62)$$

欲令 $R=\frac{r}{30 \times 19}$ 为整数,只有取 $R=0,1$,此时有 $m=59R+62m^*$

$$N_{-161} = 1121R + 1178m^* \qquad (2\text{-}21)$$

令 $R=0$,即取后元三年(公元前161)为《乾象历》近距历元;若 $R=1$,则即令太初元年(公元前104)为其近距历元,适与《三统历》合。

那么如何确定式(2-21)中之 m^* 呢?同《东汉四分历》情况一样,《乾象历》亦以交食周期推求之。因为《三统历》、《东汉四分历》皆以河平癸巳年(公元前28)为其交食周期近距起点的参照目标,且历史上当年前11月确实发生过月食,因此《乾象历》不会例外,亦应援袭惯例。河平癸巳距后元三年133年,所以距乾象上元积年为

$$N_{-28} = 133 + 1121R + 1178m^* \text{ 年}$$

于是有

$$133 + 1121R + 1178m^* \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 893)$$

求解之,得

$$m^* \equiv 34 - 29R (\mathrm{mod}\ 47)$$

当 $R=0$ 时,$m^* \equiv 34 (\mathrm{mod}\ 47)$,此处所取太初元年前11月朔

---

①晋书律历志(卷17). 历代天文律历等志汇编(5). 1581。

旦冬至的日名将不是甲子而是癸亥，与历史记录有悖。

当 $R=1$ 时，$m^* \equiv 5 \pmod{47}$，据此推算，则能够同时保证太初元年与后元三年前 11 月朔旦冬至日名皆为甲子。

因此，在 $R=0$ 或 1 的取舍之间，择 1 弃 0 是情理的结果。此时，将 m^* 的最小正整数解 $m^*=5$ 代入式(2-21)，即得河平元年距乾象上元积年为

$$N_{-28}=133+1121+1178\times 5=7144 \text{ 年}$$

《乾象历》开篇写道："上元己丑以来，至建安十一年丙戌，岁积七千三百七十八年。"按建安十一年(206)距河平元年(公元前28)，234 年(算尽)，故有当年距乾象上元积年

$$N_{206}=7144+234=7378 \text{ 年}$$

与历书合。同《东汉四分历》一样，乾象上元仅依日名、回归年、朔望月及交食周期四项先决条件即被唯一确定。由此可知其历取近点月与五星会合周期数据当属丙类，均不具备参与乾象上元推算之资格。

四、《景初历》上元积年计算

三国曹魏时期行用的《景初历》(237)，作者杨伟。该历创设交会差率与迟疾差率，使其交食周期与近点月游离于景初上元之外，从而大幅度地提高了近点月的精度。[①] 从景初上元起算的历法事项共计 8 条：日名、回归年、朔望月及五星会合周期。据《宋书律历志》载：

> 魏明帝景初元年，改定历数，以建丑之月为正，改其年三月为孟夏四月。其孟仲季月，虽与正岁不同，至于郊祀、迎气、祭祠、烝尝、巡狩、搜田，分至启闭，班宣时令，皆

①《景初历》收录在：宋书律历志(卷 12). 历代天文律历等志汇编(6). 1687～1713。

以建寅为正。三年正月，帝崩，复用夏正。[①]

这段文字是说，《景初历》甫定之时，以建丑为正，令地正前 12 月为历法起点；但实际应用时，则按人正当年正月雨水为上元之始；后来魏明帝驾崩，又将上元改为天正前 11 月冬至，“此元以天正建子黄钟之月为历初，元首之岁夜半甲子朔旦冬至。”（《景初历》开篇语）一部历书，上元为纲，“牵一发而动全身”。像《景初历》这样在颁行两年内便更变历元者，在上元积年演算史上可谓绝无仅有。

景初上元是如何变动又怎样推算的呢？在《景初历》正文之后，杨伟特意附写了一行文字：

> 魏黄初元年十一月小，[②]己卯蔀首，己亥岁，十一月己卯朔旦冬至，臣伟上。

我们将据此试解景初上元之谜。《景初历》采用 19 年 7 闰之古章法，其回归年长度为

$$t = \frac{673\ 150}{1843} \text{日}$$

日名、回归年与朔望月共同的周期为元法 $C' = 11\ 058$ 年。按黄初元年(219)11 月己卯朔旦冬至，可列如下同余式

$$tN_{219} \equiv 15 + \frac{r}{1843} (\bmod 60) \qquad (2\text{-}22)$$

其中，$0 \leqslant r < 1843$。不过上式无法获得我们所期望的答案。当减去一日余数时，有

$$tN_{219} \equiv 14 + \frac{r}{1843} (\bmod 60) \qquad (2\text{-}23)$$

令 $N_{219} = 19m$，化简之，得

$$1934m \equiv 291 - R (\bmod 1164)$$

---

①宋书律历志(卷 12)．历代天文律历等志汇编(6)．1685～1686。

②稍加推算即知，此处应指黄初元年前 11 月己卯日朔旦冬至。本节下文中直接按公元 219 年 11 月行文。特此说明。

其中，$R = \frac{1843 - r}{95}, 0 < R \leqslant 19$。再化简，得

$$967m \equiv 145 - R^{*} \pmod{582}$$

其中，$R^{*} = \frac{R-1}{2}, 0 \leqslant R^{*} \leqslant 9$。求解之，得

$$m \equiv 469 - 517R^{*} \pmod{582}$$

当 $R^{*} = 0, 1, \cdots, 9$ 时，有 10 个不同余的最小正整数解，如表 2-1 所示。

表 2-1　《景初历》上元积年计算

R^{*}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	469	534	17	82	147	212	277	342	407	472

由于杨伟特别指出十一月小，意即十一月朔旦冬至时，不及一日之余分

$$\frac{r}{1843} < \frac{2140}{4559}$$

由此可得 $R^{*} \geqslant 5$。取 $R^{*} = 5$，则 $m = 212$。因为，景初元年(237)距黄初元年(219)共 18 年，所以，景初元年距景初上元积年为

$$N_{237} = 18 + 19m = 4046 \text{ 年}$$

《景初历》开篇第一句即

壬辰元以来，至景初元年丁巳岁，积四千四十六，算上。

合问。那么，为何按杨伟所言黄初元年 11 月己卯朔旦冬至列出式(2-22)直接入算却不得结果呢？

原来，《景初历》始以建寅之月当年正月朔旦甲子夜半雨水为上元起点，当时历家仍采用平气，从冬至到雨水有 60 日多，但从 11 月朔日到次年正月朔日却只有 59 日，按正月雨水为合朔时日，则前 12 月必为大，前 11 月必为小。

但是，现在在保持上元积年数不变的情况下，将上元之始改为

天正前11月甲子夜半合朔冬至，等于把原先的上元凭空错后了60天，于是，冬至日必然提前一日。而我们在实际运算中，将杨伟所记11月己卯朔顺延为己卯初二，取黄初元年11月戊寅日为朔旦冬至，亦即将式(2-22)变为式(2-23)，这样便保证了从式(2-23)中获取正确的答案。

这个结果的确出乎意料：杨伟在更动了景初上元的情况下，竟未改变其上元积年！难怪杨伟不无自负地写道：

> 臣之所建《景初历》，法数则约要，施用则近密，治之则省功，学之则易知。虽复使研、桑心算，隶首运筹，重、黎司晷，羲、和察景，以考天路，步验日月，究极精微，尽术数之极者，皆未如臣如此之妙也。①

由于杨伟在景初上元对交食周期及近点月分别设立交会差率及迟疾差率，使其成为甲类历法常数，所以更改上元，对它们的历取值并无大的影响。

从上述推算可以看出，不需五星会合周期参与，即可将景初上元选定。又从“伟之五星，大乖于后代……拘于同出上元壬辰故也”，②就另一个角度证明《景初历》五星会合周期皆未参与其上元推算，统统属于丙类数据。

第四节　演纪上元的雏形

北凉赵𢾺的《元始历》(412)首破古章法，扩充闰周，置寻求合朔冬至之年为入算起点的上元算法于不顾。这一重大改革是为了提高历法精度，积年之法因此调整，治历者不得不另辟途径，演纪之法由是初见端倪。在《元始历》至傅仁均《戊寅元历》(626)二百余年间，大约出现了20部此类历法，其中以《大明历》最具代表

①宋书律历志(卷12)．历代天文律历等志汇编(6)．1687。
②宋书律历志(卷12)．历代天文律历等志汇编(6)．1685。

性。探讨《大明历》上元积年计算,是弄清这个时期上元算法的一把钥匙。①

一、《大明历》上元是如何推定的

在上元积年的演算史上,祖冲之的《大明历》(462)历来备受关注,因为它是第一部将所有历法项目皆命起上元的历法。这些历法项目共计12条:日名、岁名、回归年、朔望月、恒星年、交点月、近点月及五星会合周期。如果这些事项全部参与了大明上元的推算,则需要求解11个一次同余式构成的同余式组,数据都是天文数字,要古人克服由此产生的技术性障碍是很难想像的,至今也找不出能够证实上述假想的演算实例。

《宋书律历志》中记录了祖冲之为答辩戴法兴对其《大明历》的非难所著的《驳议》,其中详述了大明五年(461)他对冬至前后日影长度变化的观测,并首次提出了推算冬至时刻的数学方法。他写道:

> 又臣测景历纪,躬辨分寸,铜表坚刚,暴润不动;光晷明洁,纤毫憭然。据大明五年十月十日,影一丈七寸七分半,十一月二十五日,一丈八寸一分太,二十六日,一丈七寸五分强,折取其中,则中天冬至,应在十一月三日。求其蚤晚,令后二日影相减,则一日差率也。倍之为法,前二日减,以百刻乘之为实,以法除实,得冬至加时在夜半后三十一刻……今以臣历推之,刻如前,窃谓至密,永为定式。②

据此可知,祖冲之推算大明五年的冬至发生时刻在11月3日夜半后31刻。我们试以日名、岁名、回归年(t)及朔望月(u)常数

①《大明历》收录在:宋书律历志(卷13). 历代天文律历等志汇编(6). 1745~1758。
②宋书律历志(卷13). 历代天文律历等志汇编(6). 1767。

为先决条件，利用上述冬至时刻，来推求大明上元。

大明五年岁名辛丑，由于大明上元“岁在甲子，天正甲子朔夜半冬至，日月五星聚于虚度之初，阴阳迟疾，并自此始。”（《大明历》篇尾）故是年序数 $R_0=38$（岁名甲子为1，乙丑为2……）。据此可列同余式组如下

$$N_{461}=38+60m \tag{2-24}$$

$$tN_{461}\equiv r_1(\bmod 60) \tag{2-25}$$

$$tN_{461}\equiv r_2(\bmod u) \tag{2-26}$$

其中，N_{461}表示公元461年（大明五年）距大明上元积年。基本历法常数为

$$\text{回归年 } t=\frac{T}{B}=\frac{14\ 423\ 804}{39\ 491}$$

$$\text{朔望月 } u=\frac{U}{A}=\frac{1\ 163\ 321}{3939}$$

通过计算，知大明五年11月3日日名为乙酉，其序号为21（日名甲子为0，乙丑为1，……），令是年冬至时刻距前一甲子日夜半时刻为 $r_1=21+R_1/B$ 日。因大明五年11月3日乙酉冬至，距11月合朔时刻 r_2 大约2日，不妨令 $r_2=2+R_2/(AB)$。

又欲使上述同余式组有解，须适当选择余数 r_1 与 r_2，选择范围不能太窄，否则无法保证有解；亦不宜太宽，否则历取时刻将与实测偏离过大，与治历精神相悖。将满足式(2-25)的冬至时刻控制在实测值夜半后31刻正负一个时辰以内，则有

$$\left|\frac{R_1}{B}-0.31\right|<\frac{1}{12}$$

故 R_1 的取值区间为 $8951\leqslant R_1\leqslant 15\ 533$。

按理，合朔距冬至时刻 r_2 的误差范围也应限定在正负一个时辰以内，但由于不知合朔时刻的实测时间，故暂将其控制在11月初一以内，此时有

$$-0.31\leqslant\frac{R_2}{AB}\leqslant 0.69$$

即 R_2 的取值区间暂定为 $-101\times 477\ 446\leqslant R_2\leqslant 101\times 1\ 062\ 702$。由于式(2-26)有解的充要条件为 $101U\mid(2AB+R_2)$，令

$$\frac{2AB+R_2}{101U}=23+\frac{101\times 404\ 915+R_2}{101U}=23+R_2^*$$

则有 $0\leqslant R_2^*\leqslant 12$。于是式(2-26)化为

$$144N_{461}\equiv 23+R_2^*\pmod{391} \tag{2-27}$$

又，将式(2-24)代入式(2-25)，化简得

$$9589m\equiv 1316+\frac{R_1-8941}{60}\pmod{39\ 491}$$

因$(9589,39\ 491)=1$，故上式有解的充要条件为

$$R_1^*=\frac{R_1-8941}{60}$$

为整数，于是有 $0\leqslant R_1^*\leqslant 109$。从而将上面的同余式化为

$$9589m\equiv 1316+R_1^*\pmod{39\ 491}$$

求解上面的同余式，得

$$m\equiv 37\ 016+6750R_1^*\pmod{39\ 491}$$

代入式(2-24)，得

$$N_{461}\equiv 2\ 220\ 998+405\ 000\ R_1^*\pmod{60B}$$

代入式(2-27)，由于 $391\mid 39\ 491\times 60$，故化简可得

$$4R_1^*\equiv 235+R_2^*\pmod{391}$$

其中，$0\leqslant R_1^*\leqslant 109$，$0\leqslant R_2^*\leqslant 12$，由于 R_2^* 的取值区间较小，为便于选择合适解，将上式化为

$$98R_2^*\equiv 39+R_1^*\pmod{391}$$

当 R_2^* 取遍 0,1,…,12 时，凡使 $0\leqslant R_1^*\leqslant 109$ 且满足上式者为正解，其结果如表2-2 所示。当 R_2^* 分别取 1,5,9 三个数时，R_1^* 相应为 59,60,61，这是余数 r_2 在整日范围内任意取值所能够获得的全部解。

表 2-2 《大明历》上元积年的全部可能情形

R_2^*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R_1^*	352	59	157	255	253	60	158	256	354	61	159	257	355

$$r_1 = 21 + \frac{R_1}{B} = 21 + \frac{60R_1^* + 8941}{B}$$

$$r_2 = 2 + \frac{R_2}{AB} = 2 + \frac{101UR_2^* - 101 \times 404\,915}{AB}$$

我们对这三个解的具体内涵，分别解释如下：

第一，当 $R_1^* = 59, R_2^* = 1$ 时，有

$$r_1 \approx 21.3160 \text{ 日}; r_2 \approx (2 - 0.3160) + 0.1286 \text{ 日}$$

$$N_{461} \equiv 51\,938 (\bmod 60B)$$

历法意义：11 月 3 日夜半后 31 刻 60 分天正冬至；11 月初一夜半后 12 刻 86 分合朔。大明 5 年(461)距上元积年 $N_{461} = 51\,938$ 年，算尽。

第二，当 $R_1^* = 60, R_2^* = 5$ 时，有

$$r_1 \approx 21.3175 \text{ 日}; r_2 \approx (2 - 0.3175) + 0.4322 \text{ 日}$$

$$N_{461} \equiv 456\,938 (\bmod 60B)$$

历法意义：11 月 3 日夜半后 31 刻 75 分冬至；11 月 1 日夜半后 43 刻 22 分合朔。大明 5 年距上元积年 $N_{461} = 456\,938$，算尽。

第三，当 $R_1^* = 61, R_2^* = 9$ 时，有

$$r_1 \approx 21.3190 \text{ 日}; r_2 \approx (2 - 0.3190) + 0.7358 \text{ 日}$$

$$N_{461} \equiv 861\,938 (\bmod 60B)$$

历法意义：11 月 3 日夜半后 31 刻 90 分冬至；11 月 1 日夜半后 73 刻 58 分合朔。大明 5 年距上元积年 $N_{461} = 861\,938$，算尽。

显而易见，这三种解所确定的大明 5 年历取冬至时刻皆在 11 月 3 日夜半后 31 刻以内，与祖冲之测算结果符合。祖氏在驳斥戴法兴对《大明历》的非议时详述其测算结果并称“今以臣历推之，刻如前，窃谓至密，永为定式”，十分自信，是有根据的。

可惜祖冲之没有说明对 11 月初一合朔时刻的测算过程。事

实上前面所得三个解确定的历取合朔时刻,彼此相差皆达30刻以上,由于限定了 r_2 的误差在1/6日(约17刻)以内,因此,即使我们无法得知实测11月1日的合朔时刻,亦不妨碍得到这样的结论:上述三解中最多只有一个满足我们的条件。

据《大明历》开篇所记:"上元甲子至宋大明七年癸卯,五万一千九百三十九年,算外。"而在前述第一种情况下,得大明五年辛丑距上元积年为51 938年,算尽。"算尽"比"算外"适多一年,故该解与正文相合。

至此,我们仅以日名、岁名、回归年、朔望月为基本条件,适当限定余数 r_1 与 r_2 即将大明上元算出,并唯一确定。

二、《大明历》近点月与交点月常数

由于祖冲之《驳议》中叙述的大明五年冬至时刻的测算,是用以答辩戴法兴的诘难的,因此不可能是信意捏造的数据,对历取 r_1 的误差也不宜随意扩大。同时,由于古人以日食定合朔,可以保证非常高的测算精度,因而我们将 r_1 与 r_2 的误差范围同时限定在实测值正负1个时辰以内,当不算过份。

这样一来,其他历法事项如恒星年、交点月、近点月及五星会合周期均不成为决定大明上元的必要条件;欲使它们同既定大明上元相配合的唯一选择,即调整各自历取数据以附会既定上元。因此,考查《大明历》如何选取这些常数?它们是否通过调整自己以附会既定大明上元?这些成为一个不容回避的问题。[①]《大明历》历取近点月 u_2 与交点月 u_3 分别为

$$u_2 = \frac{U_2}{D} = \frac{726\ 810}{26\ 377} = 27.554\ 688$$

①《大明历》恒星年常数的选择,参见:曲安京等. 中国古代数理天文学探析. 西安:西北大学出版社,1994,115～117。

$$u_3=\frac{U_3}{D}=\frac{717\ 777}{26\ 377}=27.212\ 230$$

它们的精度与当时的理论值误差分别为 10.4 秒，1.3 秒。

《大明历》通法 D 与其日法 A 无明显的派生关系，系特拟数值。在历法史上，将交点月与近点月法度同以特立数据命取，仅此一例。从《大明历》交点月与近点月的精度看，选择历取数据以配合既定大明上元的过程，应该是以调整通法 D 为主，因此我们必须同时对这两个数据的调整进行考查。

假令大明五年之前某次日全食发生月距大明上元积月 M_1，设 w 为当时历家掌握之交点月值，于是有

$$M_3 = M_1 u/w + \delta,\ |\delta| \leqslant 0.5$$

M_3 为上元距此次全日食所经历的交点月数，u 为朔望月常数。令

$$u_3^* = M_1 u/M_3$$

为初调之交点月值，它与参照值 w 的误差为

$$|w-u_3^*| < \frac{w\delta}{M_3} < \frac{1}{N_{461}}$$

因大明五年 $N_{461}=51\ 938$，于是

$$|w-u_3^*| < 0.000\ 019\ 日$$

在南北朝时代，将交点月误差控制在这个范围是可以接受的。确定 u_3^* 之后，再调取 D。若将误差控制在半日之内，即

$$|u_3-u_3^*| \times M_3 < 0.5\ 日$$

则由 $u_3=U_3/D$，有

$$|U_3-Du_3^*| < \frac{D}{2M_3} \approx \frac{26\ 000}{2\times 13N_{461}} = 0.02$$

上式相当于

$$Du_3^* \equiv a(\mathrm{mod}1);a < 0.02$$

令 D 在 25 000 ~ 30 000 之间任意选择，凡满足上述不定同余式者，皆为合用之值。这样，以概率而论，对 100 个不同的 D 分别代入试验而获成功的概率为

$$1 - (1 - 0.02 \times 2)^{100} = 0.98$$

倘若 D 在数千个值的区间内选择，则不难取得十数个，乃至数十个合用 D，因此可以取到一系列不同但近似的近点月 $u_2 = U_2/D$。

由于历家测算近点月显然不及测算交点月精确，因此，每个比较庞大的通法 D 都可以确定一个理想的近点月值，所以，在与大明上元的配合过程中，交点月与近点月均有比较充裕的挑选机会。亦即，它们具备附会上元的充分条件。

三、《大明历》五星会合周期常数

在祖冲之《大明历》之前，历家选择五星会合周期的数据，均采用以回归年为参照的传统模式，祖冲之率先在形式上废除了日率 M 与周率 N，径以星率 P 及纪法 B 来表达五星会合周期

$$p = \frac{P}{B} \text{日}$$

这一创举，从理论上讲，为提高历取五星会合周期的精度，开辟了一条光明途径。因此，这种形式一直被沿袭到《授时历》废止积年日法才告结束。

由于纪法 B 为基本历法数据，在上元确定之后将不可调整，因此，欲令五星会合周期与既定上元相配合，便只能对星率 P 进行增减。这虽然是一个令人惊异的推断，我们却不得不接受这个事实。

由于五星会合周期皆比较庞大，因此在增损 P 以配合既定上元的过程中，对历取会合周期 p 的创伤有时是相当严重的。避免或减少损失的唯一指望，就是扩大纪法 B。

那么，这种调整所造成的误差究竟在怎样的范围之内可以人为控制呢？对此，有如下的误差分析：设 $p' = P'/B$ 为实测五星会合周期，令

$$p = \frac{P' + m}{B}$$

其中,m 为调整参数。假定治历年前某日行星与太阳会合,是日距既定上元积日为 n,于是

$$\frac{n}{p}=\frac{nB}{P'+m}=N+\frac{n'}{P'+m}$$

其中,N 为上元以来第 n 日行星与太阳会合的次数,调整 m,若

$$\left|N-\frac{nB}{P'+m}\right|<\frac{1}{p'}$$

则如此之 m 确定的会合周期 $p=\frac{P'+m}{B}$ 作为历取数据,就能够保证在一定时期内历注见伏与实际天象的误差不超过一日。以概率而论,在 m 次试验中,至少有一次使上式成立的概率为

$$1-\left(1-\frac{2}{p'}\right)^{m}$$

五星会合周期 p' 作为参照值,每部历法都是差不多的。按这个概率估计,可以得到表 2-3。

表 2-3　五星会合周期常数的调整概率

	水星	土星	木星	金星	火星
五星会合周期 p'	116	378	399	584	780
m	500	1000	1000	1500	2000
调整概率	0.9998	0.995	0.993	0.994	0.994

为获得较高的概率,上述 m 取值较宽。事实上,由于《大明历》尚未采用定见推算五星见伏,历法中没有考虑五星运动的不均匀规律,按任何一次实测见伏为推算标准,都不能完全准确地预报以后的行星出没情况,因此,治历者完全不必恪守某次实测的结果,对于

$$\left|N-\frac{nB}{P'+m}\right|<\frac{r}{p'}$$

可以适当扩大其中 $r\geqslant 1$ 的限定,这样就能够大大减少 m 的试验次数。我们以《大明历》前任历法《元嘉历》的五星会合周期为参照值,可以发现《大明历》对它的调整参数 m 是充分大的(表 2-4 中

的历法数据与误差值参见文献[18])。由于这个时期历取五星会合周期波动幅度较大,正好与我们上述分析相吻合。

表 2-4 《大明历》五星会合周期的调整参数

	元嘉历 p'	误差(分)	大明历 p	误差(分)	$m=B(p-p')$
木星	398.8726	-16.5	398.9031	27.4	1204
火星	779.7593	-254.6	780.0308	136.4	10 722
土星	378.0797	-17.6	378.0698	-31.8	-391
金星	583.9573	51.8	583.9309	13.7	-1043
水星	115.8815	5.8	115.8797	3.2	-71

至此,我们可以说《大明历》恒星年、交点月、近点月、五星会合周期历取数据,皆具有附会既定上元的充分条件。综上对《大明历》上元积年的推算考察可以得出两个结论:

大明上元是以日名、岁名、回归年、朔望月为先决条件唯一确定的;《大明历》中恒星年、交点月、近点月、五星会合周期皆通过调整选择以附会既定之大明上元。

第五节 演纪上元积年是怎样推算出来的

演纪上元一词,最早见于唐代一行的《大衍历》(727)。查唐宋历法,开篇第一句几乎均为“演纪上元……”通常人们认为演纪之法起于李淳风之《麟德历》(664),直至元代郭守敬之《授时历》(1280)废止积年日法,各历上元皆依此而推。如《开禧历》作者鲍澣之称:

> 至于李淳风、一行而后,总气朔而合法,效乾坤而拟数,演算之法始加备焉。……自唐麟德、开元而至于五代所作者,……无非推求上元开辟为演纪之首,气朔同元,而七政会于初度。①

①宋史律历志(卷 82). 历代天文律历等志汇编(8). 2892。

清代张敦仁认为“唐《麟德历》以后，……皆用此术（演纪术）推求上元积年。”[9]朱文鑫亦主张“唐宋历家皆以演纪法推积年。”[13]

演纪术是依代入法次第求解同余式组的数学方法。实际上，演纪之法肇源于革新闰周的历法，只不过由于李淳风废除闰周、统一法度，才逐渐使这种积年之法趋于定形，成为唐宋历家治历的一种模式化的数学手段。

通常人们认为，凡从上元起算的历法周期都应参与上元的推算，这样治历者往往必须处理11个联立的一次同余式，而秦九韶《数书九章》中所示的演纪术例题，参与推求上元的历法项目仅有：日名、岁名、回归年与朔望月四项，它们构成三个联立的同余式。笔者在文献[2]中对有关计算进行了理论推演，结果表明，在一定条件下，上述历法项目构成的同余式组，即将唐宋期间绝大多数历法的上元唯一确定（参见本章第二节）。

本节将详述我们在本章第二节中所假定之“条件”的理由，并通过对周琮《明天历》及李谦《授时历议》中附列之三种积年日法的实例演算，具体展现演纪积年的算法程式并印证我们的理论结果。

一、余数及积年数的限定

假设公元 n 年距上元积年为 N_n，则由日名、岁名、回归年（T/A）与朔望月（U/A）构成的同余式组为

$$\left.\begin{aligned} N_n &\equiv R_0(\bmod 60) \\ TN_n &\equiv R_1(\bmod 60A) \\ TN_n &\equiv R_2(\bmod U) \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}28)$$

其中，R_0 为所求年岁名序号（甲子为0，乙丑为1，…）；R_1 为所求年冬至时刻距前一甲子日夜半时分的分数，R_2 为所求年冬至时刻距11月合朔时刻的分数。同余式组(2-28)所确定之上元发生在甲子岁11月甲子日夜半合朔冬至时刻。

欲令式(2-28)有解,则余数 R_1 与 R_2 应满足一定条件,因此,需要规定一个适当的选择取值范围;在确定了取值范围之后,式(2-28)互不同余之解集合中的元素可能相当庞大,对此有何限制?

1. 积年数 N_n 应限定在一亿以内

在秦九韶演纪术文中有一个特别的程序,用以判定所求积年数是否大于 10^8,当结果将超出一亿时,要终止演算,重调日法,再行推导。

《麟德历》以后的历法中,积年数演至一亿以上者仅有两例:金朝杨级《重修大明历》和南宋李德卿《淳祐历》,这种现象被视为"不合历法"。据《宋史律历志》载:

> 十二年,秘书省言:"太府寺丞张湜同李德卿算造历书,与谭玉续进历书颇有牴牾,省官参订两历得失疏密以闻。……其二曰:玉讼积年一亿二千二十六万七千六百四十六,不合历法。今考之德卿用积年一亿以上。"①

谭玉系南宋《会天历》作者,《淳祐历》行用不及一年,便被《会天历》替代,原因之一,是《淳祐历》积年数超过一亿,"不合历法"。

因此,我们要求式(2-28)所得解 $N_n < 10^8$ 者方为合用,即将积年数限定在一亿以内。

2. 余数 R_1 与 R_2 的误差在正负 1 刻以内

这是我们对同余式组(2-28)做出的第二项限制,理由如下。

(1)日月食预告精度的需要。据《授时历议》称:

> 历法疏密,验在交食,……苟入气盈缩、入转迟疾未得其正,则合朔不失之先,必失之后。合朔失之先后,则亏食时刻,其能密乎?②

又据《宋史律历志》载:

①宋史律历志(卷 82). 历代天文律历等志汇编(8). 2896 - 2897。

②元史历志(卷 53). 历代天文律历等志汇编(9). 3333。

法不足恃，必假迁就，而朔望二弦，历法纲纪，苟失其一，则五星盈缩、日月交会，……皆不可得而正也。①

通过上述文字足见古人已深刻认识到气、朔时刻推测之准确与否将直接影响交食预告等历法应用的精确程度。另据《周琮论历》称：

较日月交食，若一分二刻以下为亲，二分四刻以下为近，三分五刻以上为远。②

其中，二刻、四刻、五刻系指日月食发生时刻与历注时刻的误差。《授时历议》中亦称：

前代考古交食，同刻者为密合，相较一刻为亲，二刻为次亲，三刻为疏，四刻为疏远。③

可见唐宋时期，历家以同刻为密合，而误差倘达到5刻以上，将被视为失测。因而，欲保障历法交食推算的精度，将气应 R_1 与闰应 R_2 的误差定在一刻以内，是情理的结果。

(2) 唐宋历法实际取值不出此范围。编制历法，测定与选择余数 R_1 与 R_2 是十分重要的工作，诚如《宋史律历志》所云："若夫较景、定气，历家最为急务。"然而，并非每一位更历者都以立表验气为必行之预备程序，"陈得一造《统元历》，刘孝荣造《乾道》、《淳熙》、《会元》三历，未尝测景。"④《宋史律历志》指出上述四历均以前任历法所推冬至与合朔时刻来选择它们各自的余数 R_1 与 R_2，兹引录如下：

绍熙四年，布衣王孝礼言："今年十一月冬至，日景表当在十九日壬午，《会元历》注乃在二十日癸未，系差一日。《崇天历》癸未日冬至加时在酉初七十六分，《纪

①宋史律历志(卷82). 历代天文律历等志汇编(8). 2889。
②宋史律历志(卷75). 历代天文律历等志汇编(8). 2688。
③元史历志(卷53). 历代天文律历等志汇编(9). 3349。
④宋史律历志(卷82). 历代天文律历等志汇编(8). 2890。

元历》在丑初一刻六十七分,《统元历》在丑初二刻二分,《会元历》在丑初一刻三百四十分。迨今八十有七年,常在丑初一刻,不减而反增。"①

以上文字表明,《统元历》(1135)与《会元历》(1191)制定时是直接用其前任历法姚舜辅之《纪元历》(1106)的历注冬至时刻调取气应 R_1 的,它们在绍熙四年(1193)所推冬至时刻相互误差皆在1刻以内,稍加推算就可发现,《统元历》与《会元历》制定时与《纪元历》历注冬至时刻的误差亦皆在1刻以内。而宋行古之《崇天历》(1024)与《纪元历》所差,实因

《崇天历》实天圣二年造,《纪元历》崇宁五年造,计八十二年。是时测景验气,知冬至后天,乃减六十七刻半,方与天道协。②

编制历法,无论是否以实测为依据选择 R_1 与 R_2,其选择误差标准理应一致。故此,上述事实有力地支持了我们关于 R_1 与 R_2 之误差范围在1刻以内的假定。

(3)《授时历议》中之三种积年日法的气应 R_1 与闰应 R_2 之误差皆在1刻以内。有趣的是,取日法为6570时,按《授时历》回归年长度所确定的最佳不足或过剩近似值入算,将 R_1 与 R_2 之误差限定在正负1刻以内分别求之,同余式组(2-28)均无合用解(或无解,或所得结果 $N_n > 10^8$)。但若将 R_1 的误差放宽至正负二刻,便可以获得与例举类型雷同的答案,而该解不为李谦所提供之结果(参见本节之三、3.)。

实际上,李谦并未扩大 R_1 与 R_2 的选择范围,而是采取了一种令人惊异的方案:调整回归年长度!这无异于表明,对 R_1 与 R_2 的误差控制,甚至比回归年的精度更重要!李谦在计算演纪上元时为不使 R_1 与 R_2 遭受重创所采取的"权宜"之计,雄辩地证明了古人对 R_1 与 R_2 误差控制的重视。因此,把 R_1 与 R_2 的选择范围定为实测值正负1刻的区间,是符合历史事实的。

①②宋史律历志(卷82).历代天文律历等志汇编(8).2890。

二、《明天历》上元积年计算

《明天历》(1064)是宋代周琮编制的一部历法。《周琮论历》中记述了治平元年(1064)推算冬至时刻与11月合朔时刻的方法与数据,并且还记录了依演纪术推上元的一些中间结果:

> 天正冬至:大余五十七,小余一万七千。……今须积岁四百一年,则冬至大、小余与今适会。
>
> 天正经朔:大余三十四,小余三万一十,[1]闰余八十八万三千九百九十。……以方程约而齐之,今须积岁七十一万一千七百六十一,则经朔大、小余与今有之数,偕闰余而相会。[2]

《明天历》基本常数有:岁周 $T = 14\ 244\ 500$,朔实 $U = 1\ 151\ 693$,日法 $A = 39\ 000$。于是,天正冬至(此即气应实测值)$R_1^* = 17\ 000 + 57A$(分);闰余(此即闰应实测值)$R_2^* = 883\ 990$(分);天正经朔,系治平元年11月合朔时刻距前一甲子日夜半时刻的日及余分,亦即 $R_3^* = R_1^* - R_2^* = 30\ 010 + 34A$(分)。因为,治平元年(1064)岁名甲辰,所以 $R_0 = 40$。令式(2-28)的 R_1 与 R_2 分别为实测值 R_1^* 与 R_2^* 的调整值:$R_i = R_i^* + r_i$,欲使

$$|R_i - R_i^*| < A/100 = 390,\text{则}|r_i| < 390,(i = 1,2)$$

将 R_i 代入并化简同余式组(2-28),得

$$N_{1064} = 40 + 60n \qquad (2\text{-}29)$$

$$95n \equiv 180 + (r_1/6000)(\mathrm{mod}\ 390) \qquad (2\text{-}30)$$

$$113\ 794n \equiv 40\ 332 + r_2(\mathrm{mod}\ 1\ 151\ 693) \qquad (2\text{-}31)$$

欲令(2-30)式有解,则需 $6000 | r_1$,而 $|r_1| < 390$,故只有取 $r_1 = 0$,于

---

①原文"小余三万一千",今依算理校改。

②宋史律历志(卷76). 历代天文律历等志汇编(8). 2636。

是式(2-30)化为

$$19n \equiv 36 \pmod{78}$$

求解上式,得 $n=6+78m$,取最小正整数解,$n=6$,代入式(2-29),得

$$N_{1064} = 400(\text{算外})$$

算尽为401年,故周琮称:"今须积岁四百一年,则冬至大、小余与今适会。"①将 $n=6+78m$ 代入式(2-31),化简得

$$814\,081m \equiv 509\,261 + r_2 \pmod{1\,151\,693} \qquad (2\text{-}32)$$

欲使式(2-32)所得结果保证1064年距上元积年 $N_{1064}<10^8$,则必令

$$m < \frac{10^8 - 400}{60 \times 78} \leqslant 21\,367$$

求解式(2-32),问题最终归结为如下同余方程

$$m \equiv 596\,420r_2 + 905\,809 \pmod{1\,151\,693}$$

其中,$0 \leqslant m \leqslant 21\,366$,$|r_2|<390$。满足上式的$(m,r_2)$共9组,如表2-5所示。

表2-5　《明天历》演纪上元的9组可选择数据

r_2	-100	-44	12	68	124	180	236	292	348
m	152	575	998	1421	1844	2267	2690	3113	3536

表2-5给出了《明天历》可能选择之演纪上元的全部情形。其中 $r_2=-100$,$m=152$ 时,得1064年距上元积年

$$N_{1064} = 400 + 60 \times 78 \times 152 = 711\,760(\text{算外})$$

算尽为711 761年,此时闰余调整为 $R_2=R_2^*+r_2=883\,890$,而经朔大小余亦随之变化为 $R_3=R_1-R_2=30\,110+34\times39\,000$,正与周琮所称相吻合:

今须积岁七十一万一千七百六十一,则经朔大小余

---

①这个结果只有依演纪术推上元时方能经历,按大衍总数术,将无此收获。

与今有之数，偕闰余而相会。

其中，所谓“今有之数”，即调整后之历取值 R_3。由此可见，《周琮论历》中所记之“天正冬至、天正经朔”，当是周琮据以推演《明天历》上元积年的实测数据。

在(m,r_2)有多种选择时，$|r_2|$越小，则 R_2 与实测值的误差越小；m 越大，所得积年数越大。显然，周琮选择了最小的 m，因而《明天历》所取上元积年，即为可能值中的最小者。

在唐宋数十家历法中，如周琮那样径将天正冬至与天正经朔之实测结果书录史志者，似无二例。因而，这组原始数据对于我们探索演纪积年本来面目的努力，就显得十分珍贵。但是，要清楚地展现演纪积年的算法特点与其解集合的分布规律，仅此一例远不足以说明问题，因为在唐宋30余家历法中，《明天历》演纪积年关于式(2-28)的解集合是最为稠密的两家历法之一，因此，《明天历》上元的推算并不具有代表性(参见本章第二节)。

不过，李谦在《授时历议》中提供的三种积年日法，分别体现了演纪积年的三种不同类型，其结果更具典型意义。

三、《授时历议》中的三种积年日法

积年之法在行用了一千多年之后，终于在元代《授时历》中结束了它的历史使命。《授时历议》作者在告别这个中国传统治历习惯时，较为系统地回顾了历代历法之上元积年，并按唐宋历家依演纪法推求演纪上元所可能出现的三种情况，附列了它们的积年日法以及至元十八年(1281)气应 R_1、闰应 R_2 及经朔 R_3 的实测数据和调整数据。

《授时历》回归年与朔望月长度分别为：$t_0=365.2425$ 日，$u_0=29.530\,593$ 日。表2-6所示三种日法 A 将分别以 t_0、u_0 为参照值来调取其各自的回归年 $t=T/A$ 与朔望月 $u=U/A$。以下我们将按演纪术所制定的程序，对表2-6的各项数据分别予以演示。

表 2-6 《授时历议》附列之三种积年日法

日法 A	气应 R_1	闰应 R_2	$R_3 = R_1 - R_2$	N_{1280}
实测	55.0600 日	20.1850 日	34.8750 日	
2190	55.0602 日 (+2)	20.1853 日 (+3)	34.8749 日 (-1)	演纪上元己亥 98 251 422
8270	55.0533 日 (-67)	20.1808 日 (-42)	34.8725 日 (-25)	演纪上元甲子 5 670 557
6570	55.0631 日 (+31)	20.1919 日 (+69)	34.8712 日 (-38)	演纪上元甲子 39 752 537

注：数据采自《历代天文律历等志汇编》(9)，第 3367～3368 页，括号中数据系与实测值之误差，为笔者所加。因《授时历》采用万分制，一刻＝100 分，故气应、闰应、经朔三值误差皆在正负 1 刻以内。

1. 日法 $A=2190$

此例上元岁名不为甲子，是一种"退化的演纪积年"，假设至元 18 年距其上元积年为 N_{1280}，则有下述同余式组

$$\left.\begin{aligned} TN_{1280} &\equiv R_1(\bmod 60A) \\ TN_{1280} &\equiv R_2(\bmod U) \end{aligned}\right\} \tag{2-33}$$

因为 $t_0A=799\ 881.07$，所以，取 $\frac{T}{A}=\frac{799\ 881}{2190}$ 日

因为 $u_0A=64\ 671.998$，所以，取 $\frac{U}{A}=\frac{64\ 672}{2190}$ 日

于是实测　$R_1^*=55.0600$ 日 $\approx 55\times 2190+131$ 分

$R_2^*=20.1850$ 日 $\approx 20\times 2190+405$ 分

令 $R_i=R_i^*+r_i$，欲使 $|R_i-R_i^*|<0.01$ 日，则 $|r_i|<0.01A<22$ 分，其中，$i=1,2$。代入同余式组(2-33)，得

$$11\ 481N_{1280}\equiv 120\ 581+r_1(\bmod 131\ 400) \tag{2-34}$$

$$23\ 817N_{1280}\equiv 44\ 205+r_2(\bmod 64\ 672) \tag{2-35}$$

求解式(2-34)，得

$$N_{1280}=29\ 963\times(40\ 194+t_1)+43\ 800m$$

其中，$t_1=\frac{r_1-1}{3}$，将上式代入式(2-35)，化简得

$$25\,240m\equiv r_2+26\,749t_1+25\,319(\bmod 64\,672)$$

求解上式，得

$$m\equiv 735r_2+2174t_1+1508+t_2(\bmod 8084)$$

其中，$t_2=\frac{3(r_2-1)-t_1}{8}$，因为$|r_1|\leqslant 21$，所以$-7\leqslant t_1\leqslant 6$，又$|r_2|\leqslant 21$，所以，当$t_1$、$t_2$在规定的范围内取整数时，皆能使同余式组(2-33)取得一互不同余的解，共计76个。对于这76个小于43 800×8084的解，只有使$N_{1280}<10^8$者方为合用，而

$$\frac{10^8\times 76}{43\,800\times 8084}+1=22$$

因此，在气应R_1与闰应R_2的误差小于1刻的情形下，同余式组(2-33)大约可以获得22个合用解。其中，使R_1与R_2的误差为最小者是$r_1=1(t_1=0)$，$r_2=1(t_2=0)$，此时所得上元积年为

$$N_{1280}=8022+2243\times 43\,800=98\,251\,422\text{ 年}$$

与答案合。调整后之气应R_1与闰应R_2分别为

$$R_1=R_1^*+\frac{r_1}{A}=55\frac{131+1}{2190}=55.0602\text{ 日}$$

$$R_2=R_2^*+\frac{r_2}{A}=20\frac{405+1}{2190}=20.1853\text{ 日}$$

俱与原文相合。

2. 日法 $A=8270$

此例上元起于甲子岁，R_1与R_2皆取实测值之不足近似值。因至元18年岁名辛巳，所以$R_0=17$，故其上元至至元18年积年N_{1280}依下式求解

$$\left.\begin{aligned}N_{1280}&\equiv 17(\bmod 60)\\TN_{1280}&\equiv R_1(\bmod 60A)\\TN_{1280}&\equiv R_2(\bmod U)\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}36)$$

因为 $t_0A = 3\ 020\ 555.475$，所以，取 $\frac{T}{A} = \frac{3\ 020\ 556}{8270}$ 日

因为 $u_0A = 244\ 218.004$，所以，取 $\frac{U}{A} = \frac{244\ 218}{8270}$ 日

实测气应　　$R_1^* = 55.0600$ 日 $= 55 \times 8270 + 496$ 分

$R_2^* = 20.1850$ 日 $= 20 \times 8270 + 1530$ 分

令 $R_i = R_i^* + r_i$，欲使 $|R_i - R_i^*| < 0.01$ 日，则 $|r_i| < 0.01A < 83$ 分，$i = 1, 2$。代入式(2-36)，得

$$N_{1280} = 17 + 60n \tag{2-37}$$

$$60Tn \equiv R_1 - 17T(\mathrm{mod}60A) \tag{2-38}$$

$$60Tn \equiv R_2 - 17T(\mathrm{mod}U) \tag{2-39}$$

化简式(2-38)，得

$$1003n \equiv 1787 + t_1(\mathrm{mod}4135)$$

其中，$t_1 = \frac{r_1 + 54}{120}$，因为 $|r_1| \leqslant 82$，所以 $t_1 = 0, 1$。求解上式，得

$$n = 3539 + 437t_1 + 4135m$$

代入式(2-39)，化简得

$$26\ 593m \equiv 15\ 209 + t_2 - 9632t_1(\mathrm{mod}40\ 703)$$

其中，$t_2 = \frac{r_2 + 4}{6}$，因为 $|r_2| \leqslant 82$，所以 $-13 \leqslant t_2 \leqslant 14$，求解上式，得

$$m \equiv 33\ 470 + 39\ 252t_2 + 14\ 903t_1(\mathrm{mod}40\ 703)$$

将 (t_1, t_2) 的 56 组不同的取值分别代入上式，所得 56 个互不同余之 m 满足

$$N_{1280} = 212\ 357 + 26\ 220t_1 + 248\ 100m < 10^8$$

者，仅有一例

$$t_1 = 0(r_1 = -54), t_2 = -5(r_2 = -34), m = 22$$

此时所得上元积年为

$$N_{1280} = 212\ 357 + 248\ 100 \times 22 = 5\ 670\ 557 \text{ 年}$$

与原文相合。调整后之气应 R_1 与闰应 R_2 分别为

$$R_1 = 55\,\frac{496-54}{8270} = 55.0534\ \text{日}$$

$$R_2 = 20\,\frac{1530-34}{8270} = 20.1808\ \text{日}$$

亦与题数吻合。

3. 日法 $A=6570$

此例上元岁名甲子，气应 R_1 与闰应 R_2 皆为实测值之过剩近似值。所求上元积年仍依式(2-36)确定。

(1) 回归年取《授时历》之最佳不足近似值。

因为 $t_0A = 2\ 399\ 643.2$，所以取 $\frac{T}{A} = \frac{2\ 399\ 643}{6570}$ 日

因为 $u_0A = 194\ 015.99$，所以取 $\frac{U}{A} = \frac{194\ 016}{6570}$ 日

实测气应　$R_1^* = 55.0600$ 日 $= 55\times6570+394$ 分

$R_2^* = 20.1850$ 日 $= 20\times6570+1215$ 分

令 $R_i = R_i^* + r_i$，欲使 $|R_i - R_i^*| < 0.01$ 日，则 $|r_i| < 66$ 分，其中 $i=1,2$。代入式(2-36)，得同余式组(2-37)～(2-39)。化简式(2-38)，得

$$177n \equiv 316 + t_1 \pmod{730}$$

其中，$t_1 = \frac{r_1-227}{540}$，因为 $|r_1| \leqslant 65$，所以 t_1 无整值。此时同余式组(2-36)无解。

(2) 回归年取《授时历》之最佳过剩近似值。令回归年 $\frac{T}{A} = \frac{2\ 399\ 644}{6570}$ 日，朔望月常数不变。化简式(2-38)，得

$$797n \equiv 1420 + t_1 \pmod{3285}$$

其中，$t_1 = \frac{r_1-4}{120}$，求解上式，得

$$n = 2075 + 1253t_1 + 3285m$$

代入式(2-39),化简得

$$3121m \equiv 2826 - 841t_1 + t_2 \pmod{4042}$$

其中,$t_2 = \frac{r_2 - 5}{48}$,求解上式,得

$$m \equiv 2380 + 589t_1 + 1321t_2 \pmod{4042} \qquad (2\text{-}40)$$

因为$|r_1| \leqslant 65$,所以 $t_1 = 0$;又$|r_2| \leqslant 65$,所以 $t_2 = -1, 0, 1$。由此可得三个互不同余之 m 值,分别为

$$m_1 = 1059, m_2 = 2380, m_3 = 3701$$

欲令所求结果满足 $N_{1280} < 10^8$,则必使

$$m < \frac{10^8}{60 \times 3285} < 508$$

显然,在$|r_i| \leqslant 65 (i = 1, 2)$条件下,所得三组解皆不可用,其积年数均大于一亿。

但是,若将气应 R_1 的误差放宽至正负二刻的范围,即$|r_1| \leqslant 131$,$|r_2| \leqslant 65$,则$|t_1| \leqslant 1$,$|t_2| \leqslant 1$,此时同余式(2-40)将可以得到 9 个互不同余的 m,其中有二例使 $m < 508$,如表 2-7 所示。其中第一种情形为 $r_1 > 0, r_2 > 0$,即 R_1 与 R_2 皆为过剩近似值,与该例类型雷同,但此非原文答案。第二种情形之 R_1、R_2 均为实测值的不足近似值,结果自然与本例原文不相符合。

显而易见,李谦拒绝了拓宽气应 R_1 之误差范围以获取合用解这样的出路。

表 2-7 气应 R_1 的误差放宽至正负二刻时的结果

t_1	r_1	t_2	r_2	m	N_{1280}
1	124	1	53	248	49 080 497
-1	-116	-1	-43	470	92 686 337

(3) 回归年取《授时历》之次佳过剩近似值。令回归年$\frac{T}{A}=\frac{2\ 399\ 645}{6570}$日,朔望月常数不变。化简式(2-38),得

$$319n \equiv 568 + t_1 (\mathrm{mod}1314)$$

其中,$t_1=\frac{r_1-21}{300}$,因为$|r_1|\leqslant 65$,所以$t_1=0$。求解上式,得

$$n = 286 + 1314m$$

代入式(2-39),化简得

$$4165m \equiv 5402 + t_2 (\mathrm{mod}8084)$$

其中,$t_2=\frac{r_2+2}{24}$,因为$|r_2|\leqslant 65$,所以$|t_2|\leqslant 2$。求解上式,得

$$m \equiv 6682 + 953t_2 (\mathrm{mod}8084)$$

当t_2分别取$-2,-1,0,1,2$时,可得5个不同余的m

$$m_1 = 4776, m_2 = 5729, m_3 = 6682, m_4 = 7635, m_5 = 504$$

欲令所得结果使$N_{1280}<10^8$,则必使

$$m < \frac{10^8}{60 \times 1314} < 1269$$

在上述5个m值中,只有$m_5=504<1269$,此时$r_1=21$,$r_2=46$。所得上元积年为

$$N_{1280} = 17\ 177 + 78\ 840m = 39\ 752\ 537\text{ 年}$$

与原文相合。调整后之气应R_1与闰应R_2分别为

$$R_1 = 55\frac{394+21}{6570} = 55.0631\text{ 日}$$

$$R_2 = 20\frac{1215+46}{6570} = 20.1919\text{ 日}$$

俱与答数吻合。

四、分析与结论

1. 演纪之法推上元是一种最优化方案

按秦九韶所述演纪之法，对同余式组(2-28)依序次第代入求解，是推求上元的最简捷方案。将 $N_n = R_0 + 60m$ 代入第二式，得

$$60Tm \equiv R_1 - R_0T(\bmod 60A) \qquad (2\text{-}41)$$

欲令上式有解，则需

$$60(A,T) \mid R_1 - R_0T$$

因为 R_0 不可调整，当 R_1 的误差被限定在正负 1 刻时，R_1 的可选择值不超过 $(0.02A+1)$ 个连续整数，(2-41)式的不同余的解将不超过

$$\left[\frac{A}{3000(A,T)} + 1\right]个$$

因此，在许多情况下，$t_1 = \dfrac{R_1 - R_0T}{60(A,T)}$只有一个取向，头绪简单，程序明了，为进一步代入运算带来了方便。

按同余式理论可以证明，当同余式组的各项余数在既定的范围内随意取值时，则无论以剩余定理还是任一种次序的代入法求解，其解集合不异。考虑到大衍总数术不具备调整选择余数 R_i 之功能的弱点，演纪之术在算法上无疑属优化方案，其所得结果并不失一般性。

2.《授时历议》所列三种情况均是唯一选择，其意义并非偶然

演纪积年所做的种种限定，有助于历法家从同余式组(2-28)中获得唯一确定解，这在很大程度上体现了演纪之法的正规性。

事实上，对演纪术之理论分析的结果表明，依概率而论，按本节一中所述先决条件，同余式组(2-28)有合用解的可能性不足3/8(参见本章第二节)。因此，出现本节三、3 中两次试验无解的情况

是不足为奇的。当然,通常情形下如果有解便是唯一选择之现象的发生亦非偶然事件。

3. 调日法不废与退化的演纪积年

据《宋史律历志》之《周琮论历》称,调日法自刘宋何承天时便已出现。在秦九韶《数书九章》演纪术术文开篇写道:“以历法求之。大衍入之。调日法,如何承天术。”将调日法列为演纪算法的第一步,何以如此?

前面说过,在本节一中所做种种限定下,同余式组(2-28)常常无合用解,就本节三、3 发生之事件而言,绝不应以损害回归年之精度为代价而“凑解”,应主动放弃导致无解之日法,重新选择,再行演算。由于古代历法对朔望月精度的要求极高,并非任一数万的大数做日法皆能胜任,因而需要一种数学手段进行挑选,调日法应运而生,并因此盛行不衰,直至元代废止积年日法。

由于同余式组(2-28)相对说来产生合用解的可能性较低,因此有可能历家推演时虽多次调换日法,却屡试不中,于是不得已而放弃以甲子为上元岁名的条件,仅以同余式组(2-33)直接计算,这样便出现了退化的演纪积年。

4. 上元的存在不是单纯的文化现象

笔者通过对积年之法的理论分析及上述实例印证,可以明确如下事实:唐宋期间参与演纪上元计算的项目不超过日名、岁名、回归年与朔望月等四项基本历法周期。计算时,原则上要求气应 R_1、闰应 R_2 与实测值的绝对调整误差小于 0.01 日,所求积年数 $N_n < 10^8$。

于是,唐宋历法中通常从上元起算的恒星年、交点月、近点月与五星会合周期便统统不复具备参与推算上元之资格,亦即演纪上元是在独立于交点月等周期之情形下事先确定的!那么,它们究竟如何与这个既定上元相配合呢?用“偶合”来解释显然是不

通的。

由此可见,上元的存在,事实上对以历法编制为其中心任务的中国古代天文学之众多天文周期的测算与选择,均有着重大的影响,即使从天文学的角度而言,上元的存在虽非必要,但对它的选择也绝不仅仅是一件无关宏旨的文化现象。单纯从算法上探索上元积年的推求看来是远远不够的,天文学史界的同仁似应投入更多的兴趣认真对待上元积年这一颇受冷遇的重大课题,因为我们发现:并非所有从上元起算的历法周期都参与了上元的推算!

参 考 文 献

[1] 陈遵妫. 中国天文学史(3). 上海:上海人民出版社,1984. 1391

[2] 曲安京. 中国古代历法中的上元积年计算. 见:数学史研究文集(1). 呼和浩特:内蒙古大学出版社,1990. 13~24

[3] [宋]秦九韶. 数书九章. 见:中国科学技术典籍通汇(数学1). 郑州:河南教育出版社,1995. 444~482

[4] 曲安京. 中国古代历法中之朔望月常数的选择. 西北大学学报(自然版),1994,24(4):323~329

[5] 曲安京. 唐宋历法演纪上元实例及算法分析. 自然科学史研究,1991,10(4):315~326

[6] 钱宝琮. 中国数学史. 北京:科学出版社,1963. 78~79

[7] 李继闵. 秦九韶关于上元积年的论述. 见:中国数学史论文集(4). 济南:山东教育出版社,1996. 22~35

[8] 李继闵. 从演纪之法与大衍总数术看秦九韶在算法上的成就. 见:秦九韶与《数书九章》. 北京:北京师范大学出版社,1987. 203~219

[9] [清]张敦仁. 求一算术. 岱南阁从书,1801

[10] [清]宋景昌.《数书九章》札记. 宜稼堂本

[11] 新城新藏. 东洋天文学史. 东京:弘文堂,1929

[12] 李文林,袁向东. 论汉历上元积年计算. 见:科技史文集(3). 上海:上海科技出版社,1980

[13] 朱文鑫. 历法通志. 上海:商务印书馆,1934

[14] 李迪. 中国数学史中的未解决问题. 见:中国数学史论文集(3). 济南:山东教育出版社,1987. 10~27

[15] 中国天文学史整理小组. 中国天文学史. 北京:科学出版社,1981

[16] 曲安京. 东汉到刘宋时期历法上元积年计算. 天文学报,1991,32(4):436~439

[17] 曲安京. 东汉到刘宋时期历法五星会合周期数源. 天文学报,1992,33(1):109~112

[18] 李东生. 论我国古代五星会合周期和恒星周期的测定. 自然科学史研究,1987,6(3):224~237

第三章　常数系统与古历修复

一部历法的制定,大体上可分为两类工作:一是历取常数的选择,一是推步算法的建立。通常历法中的计算方法在一定时期内都是相对稳定的,历史上多数历法的更替主要体现在历元的不同与天文常数的些微差别上,所以,史书中记述一些历法时,往往仅详记其历元、常数,各种推步公式则常常从略。

秦汉以来2000多年的中国历史上,大约出现了百余部历名可考的历法,其中比较完整地见诸史志者,不过50部;另有20部左右仅残存若干零星数据;其余基本上已荡然无存。

如何根据史料上遗留下来的残缺历数,修补几近亡佚的古历,是历法史研究的一个比较重要的课题。对于那些曾经颁行或参用的历法,这种修复工作更显其重要,因为,此类历法是弄清当时历日历谱的最可靠的原始文献。所以,此项研究自清代中叶以来,为多位著名学者所注目,并在他们的努力下,取得了很大的成绩。①

近年来有关古历上元推算的讨论使我们发现,上元(历元)在传统中国历法中占有某种特殊的地位,以上元的选择为核心,构成了一个天文常数系统,其中历取朔望月及回归年是这个常数系统中的基本常数。通常根据这两个基本常数将上元确定之后,才调取其他历取常数,因此,如恒星年、近点月、交点月与五星会合周期等历取值,都可以视为这个常数系统中的导出常数。[1] 由于朔望月、回归年与上元构成了一个算法子系统,所以,通常情形下,我们只要知道了其中两条,即可能将第三者依术导出(参见第二章)。

---

①如李锐的"修补奉元术"、"修补占天术",见《李氏算学遗书》。1940年,鲁实先与严敦杰在《东方杂志》等刊物上也发表了一系列有关文章。

残存古历的一个特点是:唐代以前,各历皆给出其朔望月与回归年等值,而不见载其上元;[①]唐代以后,则常给出积年、日法,不书岁余、朔余。[②]

从理论上讲,以上两类残历的修补都是有可能的,我们甚至可以期望在上元修定之后,推导出残缺的其他历取常数,如恒星年等。另外,通过朔望月与回归年同已知上元的配合,也可以判定及校证现存历取天文常数之正误。

本章所举的几例考证,是笔者重构的中国古代历法之天文常数系统的一种应用,具有算法上的一般性意义。它表明,利用这个常数系统理论,在汗牛充栋的史籍中,搜索一些业已佚失的历法的只言片语,都有可能修复这些历法的一些重要的基本常数。

第一节　早期历法基本常数考

由于传统中国历法的历元基本上都是通过历取朔望月与回归年常数推算出来的,历家称之为上元,所以,对中国古代历法历元的考证实际上包括对历取朔望月与回归年常数的共同证认。唐代以前的历法采用的是平气平朔注历,因此,这个工作的完成即意味着可依术编排出该历在当时行用期间的历谱。历元考之意义由此可见一斑。

本节采用的考证路线主要是利用残存历法的若干历数,将所有可能的历元一一推出,然后,依据其他史料及该历制定前后颁行的一些历法的取数精度,筛选所考证历法应取之基本常数。

---

①如《九宫历》(547)、《孟宾历》(576)、董峻等《甲寅元历》(576)等。此类历法皆只给出上元所在岁名,但无积年数。

②如宋《奉元历》、《占天历》、金《大明历》、《乙未元历》等。若已知日法,一般可将历取朔望月唯一确定,但在日法大于1000时,回归年常数的选择不唯一。

一、《永和历》历元考

1.《永和历》概况

目前可以查到的有关晋代《永和历》的原始记录，主要是《晋书律历志》中的一段文字：

穆帝永和八年，著作郎琅邪王朔之造《通历》，以甲子为上元，积九万七千年，四千八百八十三为纪法，千二百五为斗分，因其上元为开辟之始。①

由以上记载可知，《永和历》为王朔之于晋穆帝永和八年(352)所造，当时称"通历"。该历所取回归年

$$t = \frac{T}{B} = 365\,\frac{1205}{4883} = 365.246\,775$$

与韩翊之《黄初历》(220)相同，按古章法19年7闰，推得《永和历》所取朔望月

$$u = \frac{19}{235} \times t = \frac{356\,700}{12\,079} = 29.530\,590$$

其上元距永和八年约为97 000年，上元起于甲子岁。按永和八年岁名壬子，以甲子为上元岁名，则其积年数至永和八年满足

$$N_{352} \equiv 49\,(\mathrm{mod}60)$$

因为97 000≡40(mod60)，假定永和八年距上元积年 $N_{352}=97\,009$，则所推当年冬至时刻为

$$97\,009t \equiv 4\,\frac{1708}{4883}(\mathrm{mod}60) \equiv 4.3498(\mathrm{mod}60)$$

亦即冬至时刻发生在戊辰日35刻，而当年冬至距天正11月经朔的时间(即闰余)为

①晋书律历志(卷18). 中华书局编. 历代天文律历等志汇编(5). 北京:中华书局, 1976. 1647～1648。

$$97\,009\times\frac{235}{19}\equiv\frac{3}{19}\text{月}(\bmod 1),\text{合}\frac{3}{19}\times u=4.6627\text{ 日}$$

于是推得11月经朔时刻发生在59.6871日，从甲子日命起，合癸亥日68刻71分经朔。与表3-1诸历所推闰余与天正经朔冬至时刻相较，可以发现，因诸历闰余为0，所以当年冬至与11月经朔时刻相同，各历合朔冬至皆在丙辰日。由此即知《永和历》352年距上元积年绝非 $N_{352}=97\,009$，此数当有脱误。

表3-1　352年各历闰余、合朔、冬至时刻表

历名	作者	制历年代	N_{352}	上元岁名·日名	合朔冬至时刻	闰余
乾象历	刘洪	206	7524	己丑·甲子	52.2581	0
黄初历	韩翊	220	31 711	壬午·丙辰	0.4669	0
景初历	杨伟	237	4161	壬辰·甲子	52.2680	0
正历	刘智	274	97 489	甲子·甲子	52.2867	0
三纪历	姜岌	384	83 809	甲子·甲子	52.2481	0

注：数据来源见《晋书律历志》。

2.《永和历》上元似非起于甲子岁

另据《宋书律历志》记载：

> 晋武帝时，侍中平原刘智，推三百年斗历改宪，以为《四分法》三百年而减一日，以百五十为度法，三十七为斗分。饰以浮说，以扶其理。江左中领军琅邪王朔之以其上元岁在甲子，善其术，欲以九万七千岁之甲子为开辟之始，何承天云"悼于立意"者也。①

以上文字中有关《永和历》的记述，显系抄录《晋书》所供资料，并依此推断王朔之《永和历》上元起于甲子岁，系以刘智《正历》为宗。由表3-1可知，《永和历》制定前后，诸历均以352年为

①宋书律历志(卷12). 中华书局编. 历代天文律历等志汇编(6). 北京：中华书局，1976，1714～1715。

合朔冬至之年，取闰余为0，照此，假定《永和历》上元起于甲子岁甲子日，则永和八年距永和上元积年 N_{352} 可列同余式组如次

$$N_{352} \equiv 49(\mathrm{mod}60) \tag{3-1}$$

$$7N_{352} \equiv 0(\mathrm{mod}19) \tag{3-2}$$

$$TN_{352} \equiv r + 52B(\mathrm{mod}60B) \tag{3-3}$$

其中，$B=4883$ 为纪法，$T=1\ 783\ 500$。由式(3-1)得 $N_{352}=49+60n$，代入式(3-2)化简得

$$2n \equiv 18(\mathrm{mod}19)$$

解之，得 $n=9+19m$，于是

$$N_{352} = 589 + 1140m \tag{3-4}$$

将式(3-4)代入式(3-3)，化简得

$$1205m \equiv 93 + R(\mathrm{mod}257)$$

其中，$R=\dfrac{r-304}{1140}$，则解得上式为

$$m \equiv 92 + 106R(\mathrm{mod}257)$$

于是，代入式(3-4)，得

$$N_{352} \equiv 105\ 469 + 120\ 840R(\mathrm{mod}292\ 980) \tag{3-5}$$

表3-2给出了依式(3-5)所计算的《永和历》按甲子岁甲子日为上元所起的所有可能的历元，这些结果与“九万七千年”均相去甚远，不可能作为史书所记的《永和历》之上元积年。

表3-2　352年合朔冬至在丙辰日的几种积年

R	r	N_{352}	合朔冬至时刻
3	3724	175 009	52.7626
2	2584	54 169	52.5292
1	**1444**	**226 309**	**52.2957**
0	304	105 469	52.0623

如果不考虑上元日名，仅以甲子岁为《永和历》历元之先决条件，则所有可能的上元积年必如(3-4)式所示。90 000至99 999之间者皆如下式

$$N_{352} = 90\ 649 + 1140m^*, m^* = 0, 1, \cdots, 8$$

当 $m^*=6$ 时,得 $N_{352}\equiv 97\ 489$,是唯一一个与"97 000"相近之积年,此时得合朔冬至时刻为

$$tN_{352}=365\frac{1205}{4883}\times 97\ 489\equiv 2.8016(\mathrm{mod}60)$$

若上元起于甲寅日,则 352 年合朔冬至在丙辰日 80 刻;若上元起于癸丑日,则合朔冬至在乙卯日 80 刻。总之,此两种上元命算日所推结果,均与表 3-1 诸历的合朔时刻相差半日左右,经朔时刻有如此大之误差,一般是不能允许的。

另外,由表 3-1 可知,若《永和历》上元距永和八年积 $N_{352}=$ 97 489年,则其积年与刘智《正历》全同,但其历元所起日名不同!《正历》上元为甲子岁甲子日。这种情形在历法史上没有先例。

如果不限定上元岁名为甲子之条件,亦即不考虑同余式(3-1),而直接以两式(3-2)、(3-3)联立求解,则由式(3-2)得 $N_{352}=19n$,代入式(3-3),化简之,得

$$170n\equiv 223+R(\mathrm{mod}257)$$

其中,$R=\frac{r-304}{1140}$,解上式,得 $n=154+192R+257m$,所以有

$$N_{352}=2926+3648R+4883m$$

$$352\ \text{年合朔冬至}=52+\frac{1140R+304}{4883}$$

从甲子起算,$R=1$ 时,得合朔冬至大小余 $=52.2957$,这一结果与表 3-1 诸历所推最为相近。其中,$m=15$ 时,得 $N_{352}=79\ 819$,上元起于甲午岁;$m=39$ 时,得 $N_{352}=197\ 011$,上元起于丙午岁;前者历元岁名虽与甲子形近,但积年数 $N_{352}=79\ 819$ 与"九万七千"相去较远;后者情形恰恰相反。而当 m 取其他值时,得数无一与"九万七千"类似,故知这种前提下,亦不能得出《永和历》历元。

另外,当 $R\neq 1$ 时,所得合朔冬至大小余均与表 3-1 相差较大,《永和历》历元不可能产生于其中,因此,不再赘述。

3.《永和历》历元起于甲午岁

由以上讨论可知,《永和历》历元不大可能在甲子岁,《晋书》所记似应有误,《宋书》则系以讹传讹。按古文常见的讹误规律,甲子极可能为甲午之形误,设若这一猜想成立,即《永和历》历元起于甲午岁,则永和八年距上元积年 N_{352} 必满足

$$N_{352} \equiv 19 (\mathrm{mod}\ 60)$$

$$7N_{352} \equiv 0 (\mathrm{mod} 19)$$

求解上面的同余式组,得 $N_{352} = 19 + 1140m$,此式给出了凡是以甲午为历元岁名的所有可能结果,其积年数 N_{352} 在 90 000 与 99 999之间者,皆如以下形式

$$N_{352} = 90\ 079 + 1140m^*, m^* = 0, 1, \cdots, 8$$

其中,$m^* = m - 79$。当 $m^* = 0, m = 79$ 时,得 $N_{352} = 90\ 079$,此数所推 352 年合朔冬至时刻为

$$90\ 079t \equiv 4.2023 (\mathrm{mod} 60)$$

亦即某日 20 刻 23 分,时刻与表 3-1 诸历相近。从文字的讹脱舛误来看,原文所记"积年九万七千岁"显系"九万七十(九)岁"之误,其中"千"为"十"之误,"九"为脱文或省文。

由此可见,《永和历》上元起于甲午岁壬子日天正 11 月合朔冬至,距晋穆帝永和八年(352)壬子岁积 90 079 年,算尽。由表 3-1可知,《黄初历》上元起于壬午岁丙辰日,说明《永和历》历元不从甲子日起算并非孤例。

4. 19 年 7 闰制与冬至后天

按古章法 19 年 7 闰制,若上元起于天正 11 月夜半合朔冬至,则每隔 19 年,冬至必在天正 11 月与经朔时刻重合,是年称为合朔冬至之年。太初元年(公元前 104)制定《太初历》(后改编为《三统历》)时,测定前 104 年天正 11 月夜半合朔冬至,此后各历凡采用 19 年 7 闰者,均要照顾此一测算结果。由于太初元年距永和八

年(352)共积 104 + 352 = 456 = 24 × 19 年，适合 24 章，因此，表 3-1 所列五历皆推得永和八年为合朔冬至之年，闰余为 0。

由于 19 年 7 闰制置闰稍多，456 年合 5640 个朔望月，以公元元年回归年与朔望月理论值计算，[2]则两者相差为

$$5640 \times 29.530\,585 - 456 \times 365.242\,315 = 2.0 \text{ 日}$$

也就是说，从西汉沿续到东晋的合朔冬至，至永和八年(352)冬至已后天达 2 日左右。因此，该年度不应再为合朔冬至之年。不过，这种现象看来并未为当时的历算家所认识。结果 19 年 7 闰制又持续了 60 多年，仍然遵循《太初历》所测定的合朔冬至。直到 412 年，才为北凉的赵歐率先突破，他采用的方法是革新闰周，同时调整冬至时刻。

后来何承天于刘宋元嘉年间以土圭测影，再次获得较为精确之冬至时刻。何承天明确指出 19 年 7 闰制置闰稍多，历久必有不合，但因懒于改作，袭仍古章法，如此一来，虽苟合当时，回溯西汉，则又无法与太初元年所测天象吻合，冬至相差亦达 2 日以上。

古人以日月食验历，可以非常准确地测定经朔时刻，相比之下，对冬至时刻的验证就比较麻烦。因此，从西汉至东晋，各历所推经朔均与天相近，而冬至时刻的推算则难免顾此失彼。为了推合太初元年的天象，只能将永和八年定为合朔冬至之年，别无选择，除非更改闰周。

以上史实表明，尽管以 352 年为合朔冬至之年入算，在保证经朔时刻基本合天之情形下，不可避免地要导致冬至时刻先天二日以上的误差，历家仍然令当年闰余为 0，其原因除却对冬至时刻测算不精之外，主要是无法调和 19 年 7 闰制所产生的置闰稍多而带来的矛盾。

因此，我们以 352 年为合朔冬至之年来考证《永和历》历元是有其历史背景的，《永和历》前后诸历皆以当年闰余为 0，可证此一前提是没有问题的。

至此，我们可以比较肯定地说，《永和历》历元起于甲午岁壬

子日，距永和八年(352)积 N_{352} = 90 079 年，算尽。

二、北齐历法的若干问题

在近现代天算史学者中，严敦杰关于古历历元考证的一系列大作非常引人瞩目，曾深受大家的推崇。他所使用的考证方法也是别具一格，至今读来，仍颇受启发。因此，他的研究结论通常都是可靠的，并且多为后来的研究者引用。

20 世纪 40 年代，严敦杰根据《隋书律历志》及《开元占经》中残存的若干历数，[3] 推考了北齐董峻与郑元伟的《甲寅元历》(576)及《孟宾历》(576)的上元积年，[4~5] 其结果于 1984 年重新发表在"补《北齐书历志》"一文中(表 3-3)。[6]

表 3-3 严敦杰"补《北齐书历志》"中的主要历法常数

历 法 作 者	天保历 宋景业	武平历 刘孝孙	甲寅元历 董峻等	孟宾历 张孟宾
N_{576}	110 553	435 093	123 403*	876 573*
章岁/章闰	676/249	619/228	657/242	619/228
回归年	$\frac{8\,641\,687}{23\,660}$	$\frac{2\,939\,121}{8047}$	$\frac{8\,158\,831}{22\,338}$	$\frac{17\,860\,810}{48\,901}$
朔望月	$\frac{8\,641\,687}{292\,635}$	$\frac{33\,783}{1144}$	$\frac{8\,158\,831}{276\,284}$	$\frac{27\,995}{948}$
近点月	$\frac{8\,063\,406}{292\,635}$	$\frac{945\,673}{30\times1144}$	待考	待考

注：带 * 者为严敦杰考证的数据。

笔者在考察南北朝时期的历法时，发现《隋书律历志》中记载了如下一段历史故事：

其年(576)，讫干敬礼及历家豫刻日食疏密。六月

戊申朔，太阳亏，刘孝孙言食于卯时，张孟宾言食于甲时，郑元伟、董峻言食于辰时，宋景业言食于巳时。至日食，乃于卯甲之间，其言皆不能中。争论未定，遂属国亡。①

中国古代常以日食效历，武平七年（576），为了比较《武平历》、《孟宾历》、《甲寅元历》同当时行用之《天保历》的优劣，让它们同时推验当年六月将发生之日食时刻，结果如上所述。可惜的是，这些历法基本上都失传了。这段文字非常重要，从某种意义上讲，我们可以利用它来修复北齐诸历之历元等基本常数，同样也可以用它来验证前人对北齐历法历元的考证。

基于这种思路，笔者对严敦杰考证的历元进行了一些推算，结果发现，《孟宾历》与《甲寅元历》推算的经朔时刻不仅与《天保历》及《武平历》相差颇大，而且同上述文字中记述的日食时刻亦相去甚远（表3-4）。若加入月行迟疾因素的修正，则《天保历》的定朔时刻基本上与记录相合，而《武平历》在加入了日行盈缩的修正之后，亦与记录吻合。

表3-4 576年6月北齐四历所推日食结果②

	天保历	武平历	甲寅元历	孟宾历
经朔时刻/日	44.3591	44.3470	44.6924	44.7257
加时	戊申日 8^h37^m	8^h20^m	16^h37^m	17^h25^m
文献记载时刻	巳时 10^h	卯时 6^h	辰时 8^h	甲时 5^h
入迟疾历/日	27.4272	27.1754		
加入月亮改正	8^h55^m	9^h14^m		
入盈缩历/日		小暑后第7日		
加入太阳改正		6^h15^m		

注：经朔时刻从甲子日起算，44.3591表示戊申日35刻91分。《甲寅元历》与《孟宾历》经朔时刻，依表3-3所列积年推算。

①隋书律历志（卷17）．历代天文律历等志汇编（6）．1890。

②据张培瑜《三千五百年历日天象》（郑州：河南教育出版社，1990，1015页）推算，此次日食发生在公元576年7月12日，按北齐定都邺（河北境内），北京食分0.80，食甚时刻6点23分。唐以前24方位时制"卯甲之间"，当在5点到6点，应为初亏时刻。

我们知道，太阳视运动不均匀性大约在555年前后为张子信发现，而《天保历》行于550年，尚未采用日行盈缩之计算，因此，《天保历》定朔，即平朔+月亮改正，其日食推算时刻或者即定朔时刻，或者在定朔基础上稍做微调。月亮改正法无妨依《大业历》算式入之

$$月亮改正 = \frac{入历日余 \times 损益率 + 盈缩积分}{日法 \times 差法} \tag{3-6}$$

其中，损益率、盈缩积分、差法皆可检《大业历》月离表而得，损正益负。结果为盈，改正值为负；结果为缩，改正值取正；日法取1144。①

南北朝末期，刘孝孙《武平历》与张孟宾之《孟宾历》几乎同时考虑将太阳视运动不均匀性引入历法计算，[7]此时定朔时刻＝平朔＋月亮改正＋太阳改正，日食推算时刻即为此定朔，或在此基础上略有微调。太阳改正亦可按《大业历》算式

$$太阳改正 = \frac{入气日 \times 损益率 \div 15 + 盈缩数}{日法}$$

其中，损益率与盈缩数皆可检《大业历》日躔表，日法亦取1144，盈取负，缩取正。②

由表3-4可知，倘按严敦杰所推历元，则即使给《甲寅元历》加入月亮改正，给《孟宾历》再加入太阳改正，其结果亦与历史记载难相吻合。因此，笔者认为有必要对北齐诸历历元再进行一番考证。

---

①隋书律历志（卷17）．历代天文律历等志汇编（6）．1912～1914。

②隋书律历志（卷17）．历代天文律历等志汇编（6）．1909～1911。

三、《甲寅元历》基本常数考

1.《甲寅元历》所有可能之历元

后主武平七年(576),董峻、郑元伟立议批评宋景业之《天保历》,《隋书律历志》记述道:

> 宋景业移闰于天正,退命于冬至交会之际,承二大之后,三月之交,妄减平分。……使日之所在,差至八度,节气后天,闰先一月。……今上《甲寅元历》,并以六百五十七为章,二万二千三百三十八为蔀,五千四百六十一为斗分,甲寅岁甲子日为元纪。①

由上述文字,可知这样两方面情况,其一,当时行用的《天保历》节气后天(表3-5);其二,《甲寅元历》的基本天文常数,包括闰周、回归年与朔望月(表3-3),以及该历上元起于甲寅年甲子日。

表3-5 576年南北朝各历天正冬至、经朔、闰余一览表

历名	制定年代	N_{576}	冬至	11月经朔	闰余
大明历	(宋)463	52 053	24.2398	12.0046	12.2352
正光历	(北魏)522	167 805	24.0074	12.0198	11.9876
兴和历	(北魏)540	294 033	24.1614	12.0234	12.1380
大同历	(梁)544	1 025 733	24.3592	12.0508	12.3084
天和历	(北周)566	875 803	23.2947	12.2679	11.0268
天保历	(北齐)550	110 553	25.1611	12.0121	13.1490
武平历	(北齐)576	435 093	24.5946	12.0000	12.5946

注:闰余=冬至-天正11月经朔。

据此,参照表3-5所列武平七年天正冬至及闰余的推算结果,可列576年11月冬至距甲寅上元积年N_{576}的同余式组如下

$$N_{576} \equiv 43(\mathrm{mod}60) \tag{3-7}$$

$$242N_{576} \equiv \alpha(\mathrm{mod}657) \tag{3-8}$$

①隋书律历志(卷17). 历代天文律历等志汇编(6). 1889~1890。

$$tN_{576} \equiv 24 + r \pmod{60} \tag{3-9}$$

式(3-7)中之43系上元岁名甲寅至576年岁名丙申的序号；(242,657)为《甲寅元历》的闰周，因闰余 = $u\alpha/657$ 日（u 为朔望月，参见表3-3），所以，由表3-5知，当闰余在12日左右时，α 应在267前后取值；式(3-9)中 t 表示《甲寅元历》的回归年常数（表3-3），由表3-5知，冬至时刻应发生在戊子日（从甲子起算，戊子日序号24），因此，$0 \leqslant r < 1$。

由式(3-7)得 $N_{576} = 43 + 60n$，代入式(3-8)解得

$$n \equiv 85 + 10R \pmod{219}$$

其中，$R = \dfrac{\alpha + 106}{3} - 118$，则 $n = 85 + 10R + 219m$，于是

$$N_{576} = 5143 + 600R + 13\ 140m$$

代入式(3-9)，解之，得

$$m \equiv 13R^* + 27R + 22 \pmod{102}$$

其中，$R^* = \dfrac{22\ 338r - 1801 - 4740R}{13\ 140}$，于是

$$N_{576} \equiv 294\ 223 + 355\ 380R + 170\ 820R^* \pmod{1\ 340\ 280}$$

《甲寅元历》所有可能的上元积年悉数可由上式表出。根据表3-4及表3-5所推诸历576年各月经朔时刻，欲令《甲寅元历》预推576年6月日食与文献所记吻合，则应使576年11月经朔在11.90～12.10日之间，即丙子日夜半前后，照此限定，将冬至时刻控制在23～25之间，即戊子日前后时，所有可能的《甲寅元历》积年皆如表3-6所示。

表3-6 《甲寅元历》所有可能的上元积年

R	α	R^*	r	N_{576}	冬至时刻	11月经朔	闰余
0	248	−1	−11 339	123 403	23.4924	12.3454	11.1470
2	254	−2	−14 999	663 343	23.3285	11.9118	11.4167
3	257	−2	−10 259	1 018 723	23.5467	11.9892	11.5515
4	260	−2	−5519	33 823	23.7529	12.0665	11.6864
10	278	−3	9781	655 003	24.4379	11.9424	12.4954

续表

R	α	R^*	r	N_{576}	冬至时刻	11月经朔	闰余
11	**281**	**-3**	**14 521**	**1 010 383**	**24.6501**	**12.0198**	**12.6303**
12	284	-3	19 261	25 483	24.8623	12.0971	12.7651

其中,$R=0$ 时的情形,即严敦杰考证之《甲寅元历》的上元积年,此数与甄鸾的《天和历》相近,但经朔时刻与北魏、东魏及北齐的历法所推相差颇大。按甄鸾为北周历家(在长安),而北齐则定都河北,董峻等北齐历家没有理由舍近求远,模仿北周的参用历法所推算的不很准确的经朔时刻。隋代前后的10余部历法所推576年天正11月经朔除北周的三部历法之外,皆在12.0日前后,彼此误差不超过0.1日。

因此,我们觉得严敦杰推考的这个结果,恐非董峻等人所取之数。比较表3-6与表3-5,显而易见,$R=11$ 时,所取积年 $N_{576}=$ 1 010 383为最可能之选择,它所推冬至、经朔与闰余与《武平历》等最为接近。

2.《甲寅元历》上元距武平七年共积 $N_{576}=1\ 010\ 383$ 年

欲推定董峻、郑元伟所取上元积年,必须结合对武平七年董峻等依《甲寅元历》预推日食之记录的验证,从表3-6中进行筛选。我们可以根据如下两个步骤来确定《甲寅元历》上元:

其一,判定《甲寅元历》定朔的计算方法,并逆推该历最可能选择之上元积年。

其二,就此历元,复原《甲寅元历》近点月常数,实例验证576年6月的日食推算记录。

首先,《甲寅元历》虽与刘孝孙《武平历》及《孟宾历》几乎同时编成,但《隋书》仅记后二人同知历事,并师从张子信考日行盈缩,以求亏食之期,未言及董峻、郑元伟对太阳运动不均匀性的研究。其次,董、郑二人在批评宋景业《天保历》时,只字未提日月食推算上有何改进。第三,设若《甲寅元历》考虑了太阳盈缩之修

正，则由它与《武平历》所推日食时刻的差距来看，必然造成其经朔时刻较大的误差。另以岁差为例，《武平历》与《孟宾历》虽同时制定，但前者采用岁差，后者则无。由此可见，同时编制的历法，有可能对某些尚未“定论”的天文发现存在取舍上的不同。

因此，我们认为，《甲寅元历》的定朔 = 平朔 + 月亮改正，日食推求大体与《天保历》无异。照此结论，则比较表 3-4、表 3-5、表 3-6，可知《甲寅元历》最可能以 $N_{576}=1\ 010\ 383$（算尽）为武平七年距上元积年。

3.《甲寅元历》之近点月常数考

唐代以前的中国历法有一个特点，即当朔望月 u 的分母日法 A 取数很大时，其近点月常数必如 $u_2=U_2/A$，其中，U_2 为整数，且上元起于近地点。《甲寅元历》即属于这种类型。

因此，在断定《甲寅元历》之历元后，就可以根据近点月附会既定上元的算法模式，将《甲寅元历》之近点月常数导出。据表3-7可知，576 年 6 月朔，各历所推人迟疾历皆在近地点附近。

表 3-7　576 年 6 月朔各历所推入迟疾历时刻

历名	M_{576-6}	经朔时刻	入迟疾历	近点月常数
正光历	2 075 460	44.3668	26.6372	27.5545
兴和历	3 636 691	44.3704	27.3349	27.5545
天保历	1 367 352	44.3591	27.4272	27.5545
天和历	10 832 177	44.6143	0.1259	27.5543
武平历	5 381 371	44.3470	27.1754	27.5546
甲寅元历	**12 496 756**	**44.3668**		

按 576 年距《甲寅元历》上元积年 $N_{576}=1\ 010\ 383$，则当年 11 月距上元积月

$$M_{576-11}=\frac{8126}{657}\times N_{576}=12\ 496\ 761\frac{281}{657}$$

于是同年 6 月距上元积月 $M_{576-6}=12\ 496\ 756$。又，《甲寅元历》朔望月 $u=\dfrac{8\ 158\ 831}{276\ 284}$，因此，通过一定计算，调得

$$u_2 = \frac{7\,612\,893}{276\,284} = 27.5546$$

使得

$$uM_{576-6} \equiv 0.1608(\mathrm{mod}u_2)$$

其中,余数0.1608日表示576年6月经朔时刻入迟疾历,与表3-7相较,此数基本可用。于是,按(3-6)式,检《大业历》月离表,可得

$$月亮改正 = \frac{-(0.1608 \times 2548) \times 238 + 0}{5600 \times 1144} = -0.0152 日$$

其中,2548为《大业历》近点月分母,238为损益率,盈缩积分取0,5600为差法。于是得576年6月定朔时刻为

$$44.3668 - 0.0152 = 44.3516$$

即戊申日35刻16分,加时在$0.3516 \times 24 = 8^h26^m$,正在辰时,与《隋书》所记吻合。

四、《孟宾历》基本常数考

由表3-4对日食的推验可见,《武平历》的定朔确实已加入了太阳改正项。假若《孟宾历》未计人日行盈缩的修正,则欲令其576年6月朔所推日食在甲时(5^h),势必导致它与《武平历》经朔时刻的较大误差。但是,据《隋书律历志》记载:

> 又有广平人刘孝孙、张孟宾二人,同知历事。孟宾受业于张子信,并弃旧事,更制新法。……张孟宾以六百一十九为章,四万八千九百[一]为纪,九百四十八为日法,万(四)[一]千九百四十五为斗分。元纪共命,法略旨远。日月五星,并从斗十一起。盈缩转度,阴阳分至,与漏刻相符,共日影俱合,循转无穷。上拒春秋,下尽天统,日月亏食及五星所在,以二人新法考之,无有不合。①

①隋书律历志(卷17).历代天文律历等志汇编(6). 1890。

上述文字告诉我们,《武平历》与《孟宾历》所推气朔应十分接近。张孟宾与刘孝孙师从张子信,更制新法,以此推日月亏食,"无有不合"。表明两历皆将日行盈缩引入日月食推算。因此,有关《孟宾历》历元的考证,须基于这样两个前提:其一,上元起于甲子岁甲子日,即"元纪共命";其二,定朔≈平朔+月亮改正+太阳改正。

与《甲寅元历》的算法类似,设576年距《孟宾历》上元积年为N_{576},则有同余式组如下

$$N_{576} \equiv 33(\mathrm{mod}60) \tag{3-10}$$

$$228N_{576} \equiv \alpha(\mathrm{mod}619) \tag{3-11}$$

$$tN_{576} \equiv 24 + r(\mathrm{mod}60) \tag{3-12}$$

其中,式(3-10)中之33系576年岁名丙申的序号,从甲子起算。(228,619)为《孟宾历》的闰周,闰余$=u\alpha/619$日,u、t分别为《孟宾历》朔望月与回归年常数(参见表3-3)。由表3-5可知,576年天正冬至应在戊子日,日名序号为24,从甲子起算,因此,$0 \leqslant r < 1$。

由式(3-10)得$N_{576}=33+60n$,代入式(3-11),解之得

$$n = 372 + 10R + 619m$$

其中,$R=\alpha-257$,于是

$$N_{576} = 22\ 353 + 600R + 37\ 140m$$

代入式(3-12),解之得

$$m \equiv 18 + 5R^{*} - 17R(\mathrm{mod}79)$$

其中,$R^{*}=\dfrac{48\ 901r+5874+1020R}{37\ 140}$,于是得

$$N_{576} \equiv 690\ 873 - 630\ 780R + 185\ 700R^{*}\ (\mathrm{mod}\ 2\ 934\ 060)$$

《孟宾历》所有可能的上元积年均可从上式表出。根据《孟宾历》与《武平历》日食推算之差判断,《孟宾历》所推576年天正11月经朔当在丙子日夜半前后10刻以内,即11.90~12.10之间,按《孟宾历》与《武平历》气朔近合,可要求576年天正冬至依《孟宾历》所推在戊子日内,即24.0~25.0之间。满足这种条件的所有

可能的《孟宾历》上元积年如表3-8所示。

表3-8 《张孟宾历》所有可能的上元积年

R	α	R^*	r	N_{576}	天正冬至	11月经朔	闰余
6	**263**	**1**	**25 146**	**25 953**	**25.5142**	**11.9653**	**12.5469**
5	262	1	25 166	656 733	24.5351	12.0359	12.4992
0	257	1	31 266	876 573	24.6394	12.3787	12.2607
-5	252	0	-774	1 096 413	23.9842	11.9621	12.0221
-6	251	0	246	1 727 193	24.0050	12.0306	11.9744

其中，$R=0$ 时，$N_{576}=876\ 573$，即为严敦杰所推结果，其天正经朔时刻与《武平历》相差达38刻。

与表3-5相较，表3-8中诸栏数据最与《武平历》相近者当推 $R=5$ 时，$N_{576}=656\ 733$。不过，按《武平历》推576年6月朔食于卯时(6^h)，《孟宾历》称食于甲时(5^h)，其定朔相差应为 $1/24=0.0417$ 日，又两历经朔时刻相差0.0359日，假定其太阳改正相同，则其月亮改正之差达 $0.0359+0.0417=0.0776$ 日，相当于其入迟疾历日相差0.8日，由此推之，《孟宾历》此时入迟疾历当在0.5日前后，比较表3-7诸历入迟疾历时刻，可知此数所推结果误差稍大。

若按 $R=6$ 时，$N_{576}=25\ 953$，则与《武平历》经朔时刻相差 -0.0327 日 $=-47^m$，接近一个小时，照此推之，欲令《武平历》定朔迟于《孟宾历》定朔一个小时，则两历的月亮改正与太阳改正将十分吻合，因此，这个结果最可能是《孟宾历》所取之数。

$R=-5,-6$ 时的情形，虽则天正经朔与《武平历》近合，但其冬至与《武平历》则相差半日，显然不如前两种结果的可能性大。

本节获得的主要结果是：

(1) 晋代王朔之的《永和历》上元起于甲午岁壬子日，距穆帝永和八年(352)积 $N_{352}=90\ 079$ 年。

(2) 北齐董峻、郑元伟之《甲寅元历》上元甲寅岁至武平七年(576)丙申共积 $N_{576}=1\ 010\ 383$ 年，算尽。《甲寅元历》历取近点月 $u_2=\dfrac{7\ 612\ 893}{276\ 284}$。

(3) 北齐《孟宾历》上元甲子岁至武平七年丙申共积 $N_{576}=$ 25 953年,算尽。

第二节 宋金历法基本常数考

唐代以后,围绕演纪上元形成的天文常数系统完全定型,其中朔望月、回归年作为基本常数,将上元积年确定,历取恒星年、近点月、交点月与五星会合周期作为导出常数,通过附会既定上元而调整出来。这个模型,就是我们在第二章重构的中国古代历法的天文常数系统理论。在这样的理论框架指导下,我们以宋金时期的历法为例,考证了4部残缺历法的基本常数,其中包括发掘了2部已经失传的宋代历法,恢复了它们的常数系统。

一、王睿的《至道新历》

宋至道元年(995),司天监丞王睿曾进呈了两部历法,史称《至道新历》。此事在《宋会要》及宋代王应麟(1223 ~ 1296)的类书《玉海》中均有记载,但因其所记数据约略,近现代天文史著述皆以无考或无传视之。[8~9]现据《宋会要辑稿》摘录如下:

> 至道元年九月,司天监丞王睿献新历,睿言准开元《大衍历》议定大衍之数,乃何承天气朔母法参详监司所奏,于二万已下修撰日法,演纪不过亿数。臣今于二万已下参详到日法有二,演元不及亿数。其一,日法一万五百九十,演得积年一千六百五十一万五千九百余岁;其二,日法一千七百,演得积年三百九十八万一千一百余岁。

由以上文字可知,王睿依据前代历家编制历法的惯例,以日法 $A<20\,000$,积年数 $N_n<10^8$ 为选择历元及常数的先决条件,按何承天调日法算法调得两例日法 A,分别演得上元,其积年数皆不过一亿。

为了区别王睿编制的两部历法，以下我们不妨按古历命名之习惯，分别称之为《至道历》与《王睿历》。[①] 由于唐宋诸历朔望月常数值大体上在29.530 59前后，精度达10^{-5}以上，故此，在日法$A<20\ 000$时，即将历取朔望月常数$u=U/A$基本上唯一确定

$$《至道历》:A = 10\ 590, u = 29\frac{5619}{10\ 590} = 29.530\ 595\ 日$$

$$《王睿历》:A = 1700, u = 29\frac{902}{1700} = 29.530\ 588\ 日$$

由上述文字提供的信息除了将二历朔望月常数大致确定外，其他皆需进一步的推算考证。其推考步骤为：

首先，据治历前后所颁行诸历之回归年数值，给出本历可能选择的回归年常数值，因回归年常数精度通常不是很高（与历取朔望月相比），所以，日法较大时，常常有多种可选择的情况发生。

其次，利用某一参照的回归年及确定的朔望月，具体将其历元导出。然后，根据已知积年数的约略值，例如，《至道历》上元距至道元年（995）积年$N_{995}\approx16\ 515\ 900$，《王睿历》上元距至道元年积年$N_{995}\approx3\ 981\ 100$，判别推算的结果中有无应取之历元。若是，则基本常数皆定；若否，则须另取回归年参照值再行推演。

通常，唐宋历家皆以甲子岁甲子日为上元起点，因之，我们的考证验算，一般皆以甲子为历元岁名、日名布算。为了简化计算，无妨取天圣元年（1023）冬至与天正11月经朔为入算切口，因为次年适为甲子年。当年的冬至、经朔及闰余（11月经朔距冬至时刻的时间），按《至道历》前后各两历推算，结果如表3-9所示。

---

①中国古代历名的选取方式大致可分为四类：a. 以治历年之年号为名，如《太初历》等，此为常例；b. 以历元为名，如《戊寅元历》等；c. 以作者为名，如《孟宾历》，此多为后人所加；d. 其他，如《三统》、《四分》、《乾象》、《大衍》诸历，这类历法多与术数等神秘文化现象牵扯为名。

表 3-9　天圣元年(1023)冬至、闰余及 11 月经朔

历名	年代	$t=365$	$u=29$	冬至时刻	11 月经朔	闰余
应天历	962	24 445	530 594	28.1644	26.6392	1.5252
乾元历	981	24 490	530 612	28.1633	26.6531	1.5102
仪天历	1001	24 456	530 594	28.1584	26.6331	1.5253
崇天历	1024	24 457	530 595	28.1586	26.6337	1.5249

二、《至道历》基本常数考

1.《至道历》回归年与《崇天历》不同

因为《至道历》日法 $A=10\ 590$，与《崇天历》相同，故两历朔望月取值不异，假定它们的回归年亦相同，则

$$t=\frac{T}{A}=365\ \frac{2590}{10\ 590}\ \text{日}$$

据此，可以列出 1023 年距至道上元积年 N_{1023} 的算式如下

$$\left.\begin{aligned} N_{1023} &\equiv 0(\bmod 60) && (3\text{-}13)\\ TN_{1023} &\equiv 28A+r_1(\bmod 60A) && (3\text{-}14)\\ TN_{1023} &\equiv A+r_2(\bmod U) && (3\text{-}15)\end{aligned}\right\}\ \text{I}$$

其中，$A=10\ 590$ 为日法，$T=3\ 867\ 940$，$U=312\ 729$。当 $N_{1023}=60n$ 时，代入式(3-14)，化简之，得

$$259n\equiv R_1(\bmod 1059) \qquad (3\text{-}16)$$

其中，$R_1=\dfrac{28A+r_1}{600}$。由表 3-9 可知，冬至时刻发生在壬辰日(日名序号为 28)夜半后 16 刻左右，假定《至道历》所推冬至时刻在壬辰日 16 ± 3 刻以内，则有 $0.13A<r_1<0.19A$ 亦即

$$496.5\leqslant R_1\leqslant 497.6$$

欲使式(3-16)有解，必取 $R_1=497$，则 $r_1=1680$ 分 $=0.1586$ 日。由此得 1023 年冬至时刻为壬辰日 15.86 刻。求解式(3-16)，得

$$n\equiv 497\times 184(\bmod 1059)$$

或 $n=374+1059m$，代入式(3-13)，得

$$N_{1023}=22\ 440+63\ 540m \tag{3-17}$$

欲令 $N_{1023}<10^8$，必使 $m\leqslant 1573$，将式(3-17)代入式(3-15)，得

$$63\ 388m\equiv 40\ 008+R_2(\mathrm{mod}104\ 243) \tag{3-18}$$

其中，$R_2=r_2/3$。由表 3-9 知，11 月经朔应在庚寅日（日名序号 26）64 刻左右，假定《至道历》所推经朔在当日 64±2 刻以内，则有 $(1-0.66)A+r_1<r_2<(1-0.62)A+r_1$。所以，有

$$1761\leqslant R_2\leqslant 1901$$

令 $k=R_2-1831$，则 $-70\leqslant k\leqslant 70$，求解式(3-18)，得

$$m\equiv 84\ 142k+26\ 785(\mathrm{mod}104\ 243) \tag{3-19}$$

将 $k(-70\leqslant k\leqslant 70)$ 代入式(3-19)，使 $m\leqslant 1573$ 者仅三例，如表 3-10 所示，其中冬至 $=28+r_1/A$；11 月经朔时刻 = 冬至时刻 $-(1+r_2/A)$，$A=10\ 590$。表 3-10 所给三例中，无一与 $N_{1023}\approx$ 16 515 900相近，其中，$N_{1023}=97\ 556\ 340$，即为《崇天历》所取积年数。由此证明，《至道历》与《崇天历》所取回归年常数必不相同。

表 3-10　1023 年《至道历》三种可能的上元积年（Ⅰ）

k	m	N_{1023}	冬至	11 月经朔	r_1	r_2
22	1535	97 556 340	28.1586	26.6337	1680	5559
48	124	7 901 400	28.1586	26.6264	1680	5637
-35	619	39 353 700	28.1586	26.6499	1680	5388

2. 假定《至道历》回归年比《崇天历》小

设《至道历》回归年取

$$t=\frac{T}{A}=365\frac{2589}{10\ 590}=365.2445\ \text{日}$$

由表 3-9 可知，此间历取回归年数值多在 365.2445 左右，因此，这个常数比较接近那个时代的选择。将此回归年常数代入同余式组Ⅰ，亦将冬至时刻控制在壬辰日 16±3 刻，即 $0.13A<r_1<0.19A$；同时将 11 月经朔时刻控制在庚寅日 64±2 刻，即 $(1-0.66)A+r_1<$

$r_2 < (1-0.62)A + r_1$。求解同余式组 I,得

$$N_{1023} = 89\,940 + 127\,620R_1 + 211\,800m$$

其中,$R_1 = \frac{28A + r_1}{180} - 1657$,$R_1 = 0$ 时,$r_1 = 1740$;$R_1 = -1$ 时,$r_1 = 1560$。并且

$$m \equiv 13\,251 + 75\,608R_1 + 23\,571R_2 \pmod{104\,243}$$

其中,$R_2 = \frac{r_2}{3} - 1851 - 60R_1$,$-70 \leqslant R_2 \leqslant 70$;欲令 $N_{1023} < 10^8$,则需 $m \leqslant 472$。按以上条件,仅有二例为同余式组 I 之合用解,如表 3-11 所示。这两解显然皆与史书中所记积年数相去甚远,说明《至道历》亦未取回归年 $\frac{T}{A} = 365\frac{2589}{10\,590}$。

表 3-11 1023 年《至道历》二种可能的上元积年(Ⅱ)

R_1	R_2	m	N_{1023}	冬至	11 月经朔	r_1	r_2
-1	69	397	84 046 920	28.1473	26.6204	1560	5580
-1	-46	50	10 552 320	28.1473	26.6530	1560	5235

3. 假定《至道历》回归年比《崇天历》大

设《至道历》回归年取

$$t = \frac{T}{A} = 365\frac{2591}{10\,590} = 365.2447 \text{ 日}$$

按此回归年,比之《乾元历》稍小,较其他三历为大,亦属可参照之值。将此回归年常数代入同余式组 I,由式(3-13)得,$N_{1023} = 60n$,代入式(3-14),有

$$2591n \equiv R_1 \pmod{10\,590} \tag{3-20}$$

其中,$R_1 = \frac{28A + r_1}{60}$,亦将冬至时刻控制在壬辰日 16 ± 3 刻,即 $0.13A < r_1 < 0.19A$,则有

$$4946.9 \leqslant R_1 \leqslant 4975.6$$

令 $k_1 = R_1 - 4970$，则 $-5 \leqslant k_1 \leqslant 5$，由此得 $r_1 = 1680 + 60k_1$。求解式(3-20)，得

$$n = 9190 + 5951k_1 + 10\ 590m$$

代人 $N_{1023} = 60n$，于是得

$$N_{1023} = 551\ 400 + 357\ 060k_1 + 635\ 400m$$

欲令 $N_{1023} < 10^8$，必使 $m \leqslant 157$，将上式代入式(3-15)，得

$$11\ 736m \equiv 13\ 131 + 81\ 229k_1 + R_2 (\mathrm{mod}104\ 243)$$

其中，$R_2 = r_2/3$，将 11 月经朔时刻控制在庚寅日 64 ±2 刻，即 $(1 - 0.66)A + r_1 < r_2 < (1 - 0.62)A + r_1$。则有 $20k_1 + 1761 \leqslant R_2 \leqslant 20k_1 + 1901$。令 $k_2 = R_2 - 20k_1 - 1831$，则 $-70 \leqslant k_2 \leqslant 70$。求解上式，得

$$m \equiv 55\ 729 + 97\ 828k_1 + 62\ 576k_2 (\mathrm{mod}104\ 243)$$

当 $-5 \leqslant k_1 \leqslant 5$ 及 $-70 \leqslant k_2 \leqslant 70$ 时，上式中使 $m \leqslant 157$ 者，仅三例，如表 3-12 所示。其中，$m = 24$，$N_{1023} = 16\ 515\ 120$ 即为所求。

表 3-12　1023 年《至道历》三种可能的上元积年(Ⅲ)

k_1	k_2	m	N_{1023}	冬至	11 月经朔	r_1	r_2
2	**-39**	**24**	**16 515 120**	**28.1700**	**26.6510**	**1800**	**5496**
-1	14	21	13 537 740	28.1530	26.6360	1620	5475
-4	67	18	10 560 360	28.1360	26.6210	1440	5455

按此，至道元年(995)距至道上元积年 $N_{995} = 16\ 515\ 092$，原文“演得积年一千六百五十一万五千九百余岁”显系“演得积年一千六百五十一万五千九十余岁”之误。此种讹误，极可能是筹算布列记数时失误所致，符合中算典籍中的舛误规律。由此可证，《至道历》回归年取

$$t = 365 \frac{2591}{10\ 590}$$

演纪积年至至道元年为 $N_{995} = 16\ 515\ 092$ 年，算尽。《至道历》上元起甲子岁甲子日夜半合朔冬至。

三、《王睿历》基本常数考

1.《王睿历》历元并非起于甲子岁之甲子日

由于《王睿历》日法 $A=1700$，较小，因此，其历取回归年常数比较易于界定，考察表 3-9 之四历所取回归年长度，可以推知以下二值之一应为《王睿历》所取之回归年常数

$$\frac{T}{A}=365\frac{416}{1700}=365.2447;\frac{T}{A}=365\frac{415}{1700}=365.2441$$

对于同余式组 I，令回归年与朔望月分别为

$$\frac{T}{A}=365\frac{416}{1700},\frac{U}{A}=29\frac{902}{1700}$$

由式(3-13)得 $N_{1023}=60n$，代入式(3-14)，化简得

$$104n\equiv R_1(\bmod 425)$$

其中，$R_1=\frac{28A+r_1}{240}$。亦将冬至时刻控制在壬辰日 16 ±3 刻，则由 $0.13A<r_1<0.19A$，得

$$199.2\leqslant R_1\leqslant 199.8$$

无解。

设若 $R_1=199$，得冬至时刻：$28+\frac{r_1}{A}=28.0941$。

若取 $R_1=200$，则冬至时刻：$28+\frac{r_1}{A}=28.2353$。

以上两种选择与冬至时刻参照值(28.16)之差皆在 6 刻以上，这种情况在宋代历法中是不允许的，除非经过精测冬至时刻，证明前任历法所推后天或先天已多，方能校正。但是，这种据实际精测而产生的冬至时刻的校正，一应在史书中有所反映，二应在其后历法的推算中有所应用。这两条均不具备，故知《王睿历》或者不以

$$\frac{T}{A}=365\frac{416}{1700}$$

为历取值,或者历元不为甲子岁或甲子日。若令回归年与朔望月分别为

$$\frac{T}{A}=365\frac{415}{1700},\frac{U}{A}=29\frac{902}{1700}$$

则由 $N_{1023}=60n$,代入式(3-14),化简得

$$83n\equiv R_1(\mathrm{mod}340)$$

其中,$R_1=\frac{28A+r_1}{300}$。亦将冬至时刻控制在壬辰日 16 ±3 刻,则由 $0.13A<r_1<0.19A$,得

$$159.4\leqslant R_1\leqslant 159.8$$

亦无解。

设若 $R_1=159$,得冬至时刻:$28+\frac{r_1}{A}=28.0588$。

若令 $R_1=160$,则冬至时刻:$28+\frac{r_1}{A}=28.2353$。

以上两种选择与参照值(28.16)之差均达 7 刻以上。由此可见,《王睿历》历元恐非以甲子岁或甲子日为起点。具体计算亦表明,以上两种情形所推结果,皆不与《王睿历》积年数吻合。不再赘述。[10]

2.《王睿历》历元起于甲子岁甲午日

前文已述,《至道历》回归年为

$$\frac{T}{A}=365\frac{2591}{10\ 590}=365.2447$$

由此可得《王睿历》回归年与朔望月应为

$$t=\frac{T}{A}=\frac{620\ 916}{1700}=365.2447,\ u=\frac{U}{A}=\frac{50\ 202}{1700}$$

如果不考虑《王睿历》上元岁名与日名之先决条件,不妨假定其上

元至 1023 年积年为

$$N_{1023} = 3\ 981\ 100 + n, (\text{算尽})$$

于是有

$$TN_{1023} \equiv 29\ 310 + 18\ 492n(\mathrm{mod}U)$$

设 r 表示闰余,即天正 11 月经朔距冬至时刻的时间,根据表 3-9,1023 年闰余约为 1.5 日,因为

$$tN_{1023} \equiv r(\mathrm{mod}u)$$

当 n 在 0～130 之间任取整数时,有下列诸数使 tN_{1023} 之闰余 r 在 1.5 日左右

$$n = 4 + 19k, k = 0,1,2,3,4,5,6$$

由于不限定《王睿历》上元日名,因此其冬至时刻即 tN_{1023} 之小余部分应在 0.16 日左右(见表 3-9),由此可进一步确定积年数 $N_{1023} = 3\ 981\ 100 + (4 + 19k)$ 之大小

$$tN_{1023} \equiv 19.5671 + 39.649\ 412k(\mathrm{mod}60)$$

当 k 取 0,1,2,…,6 时,考察 tN_{1023} 之小余,在 $k = 4$ 时

$$tN_{1023} \equiv 58.1647(\mathrm{mod}60)$$

此时,$N_{1023} = 3\ 981\ 180$,而由 $TN_{1023} \equiv 2610(\mathrm{mod}U)$,得闰余 $r = 2610/1700 = 1.5353$,11 月经朔 $= 58.1647 - 1.5353 = 56.6294$,这一结果表明《王睿历》上元起于甲午日。又

$$N_{1023} = 3\ 981\ 180 \equiv 0(\mathrm{mod}60)$$

所以《王睿历》上元起于甲子年。至道元年(995)距《王睿历》上元积年

$$N_{995} = 3\ 981\ 152$$

算尽,与记载吻合。

四、《乾兴历》基本常数考

1. 有关《乾兴历》的记载与考证

《乾兴历》(1022)为宋代历算家张奎所撰,历术已佚,仅存若

干数据，史书所记互有出入，如《宋史律历志》称：

> 乾兴初，议改历，命司天役人张奎运算，其术以八千为日法，一千九百五十八为斗分，四千二百九十九为朔，距乾兴元年壬戌岁，三千九百万六千六百五十八为积年。①

南宋王应麟之《玉海》中引述上述文字，将朔余记为“四千二百四十九”，积年为“三千九十万六千六百五十八”。《畴人传》张奎条目下叙述上述事实时，以“四千二百四十四”为朔余，积年数与《玉海》相同。

若按史书记载，《乾兴历》日法取 $A=8000$，则当朔望月 $u=29.530\ 59$ 时，得 $u=29\frac{4244.7}{8000}$。若取 $u=29\frac{4244}{8000}=29.5305$，精度之粗已甚；倘令 $u=29\frac{4249}{8000}$或 $u=29\frac{4299}{8000}$，其数所差更甚。查唐宋元历法诸朔望月常数，最粗疏者为宋代吴昭素之《乾元历》

$$u=29\frac{1560}{2940}=29.530\ 612$$

此数实际上为何承天调日法之强率。② 除《乾元历》外，宋元历法朔望月常数均在 29.530 588 ~ 29.530 596 之间，因此《乾兴历》若以 8000 为日法，除非朔余在分下立秒（即取若干小数），否则绝不可用。而分下设秒虽有先例，亦属罕见，且不为历家所宗，如此取数均将遭到后世或同代历家的严厉批评。

20 世纪 40 年代，鲁实先据何承天调日法将《乾兴历》日法校为 $A=8008$，如此所得朔望月 u 与回归年 t 分别为[11]

---

①宋史律历志（卷 71）．中华书局编．历代天文律历等志汇编（8）．北京：中华书局，1976，2567 ~ 2568。

②$29\frac{1560}{2940}=29\frac{26}{49}$。何承天调日法以$\frac{26}{49}$为强率，$\frac{7}{19}$为弱率，依$\frac{26m+9n}{49m+17n}$调取日法朔余。

$$u = 29\frac{4249}{8008} = 29.530\,594, t = 365\frac{1958}{8008} = 365.244\,5$$

鲁实先还据所校朔余斗分,分别以《宋史》及《玉海》所记积年数推验乾兴元年前天正11月经朔及冬至时刻,证实《宋史》所录为谬,《玉海》记载不误。不久,严敦杰即依鲁实先校定之《乾兴历》积年日法朔余,推得乾兴元年前冬至及闰余分别为[12]

$$冬至时刻 = \frac{141\,724}{8008}, 闰余 = \frac{74\,713}{8008}$$

并据此为当年《乾兴历》推求乾兴上元的实测数据,亦列同余式组,按演纪之法将乾兴上元推出,以此结果印证鲁实先所考确实。①

非常遗憾的是,鲁、严的准确考证似乎并未引起现代天文史家的足够重视与认同,目前笔者所见有关古历基本常数表,无一完全采纳鲁、严对《乾兴历》的考证。[13,14]②

出现这种现象的原因可能是多方面的,其中鲁、严二文发表时间较早,不易查找,恐怕是导致这种局面的原因之一。为使鲁、严二者的工作能为更多的学者了解,今不揣浅陋,在以上介绍文字之后,进一步推证他们的结论,以为贤者续貂。

2.《乾兴历》日法为 $A = 8008$

前文已述,严敦杰所取"实测乾兴元年天正冬至气骨定分,天正经朔闰骨定分",系依鲁实先考定历数推算的结果。一般说来,

---

①严敦杰所列乾兴元年(1022)距上元积年 N_{1021}(算外)的同余式组可以表示为

$$N_{1021} \equiv 58 \pmod{60}$$
$$TN_{1021} \equiv 141\,724 \pmod{60A}$$
$$TN_{1021} \equiv 74\,713 \pmod{U}$$

其中,U(朔实)=236 481,T(岁实)=2 924 878,A(日法)=8008。

②文献[13]的书后所列附表,取《乾兴历》朔望月为29.530 59,显系采用了鲁实先的校改,而其回归年为365.2448则不知所宗,或为 $365 = \frac{1958}{8008} = 365.2445$ 之误。

治历者推求上元时所用"气骨分"(冬至时刻)及"闰骨分"(闰余)皆是实测数据的参照值,具体计算时,尚需在某一允许的范围内,对参照值"气骨分"及"闰骨分"进行适当的调整方能令所列同余式组有解。

也就是说,通常情形下,历家测定的冬至时刻及闰余参照值,并不能保证所列同余式组有解,必然要经过一定的调整。秦九韶《数书九章》"治历演纪"的术文中对此有专门的说明。但事实上,细考秦九韶"治历演纪"题算草及清代张敦仁《求一算术》(1801)对《开禧》等历上元的推算,发现他们所取之"气骨分"及"闰骨分"亦系原历推求的结果,其所列同余式组运算过程中自然皆不需对"气骨分"与"闰骨分"进行调整。严格地说,这样的推算都是一种还原运算。

以下我们以1023年冬至为入算切点,据鲁实先考定之日法朔余,$A=8008$ 为日法,$U=236\ 481$ 为朔实;$T=2\ 924\ 878$ 为岁实,代入同余式组 I。令 $N_{1023}=60n$,代人式(3-14),化简得

$$89n \equiv 169 + R_1(\text{mod}364) \tag{3-21}$$

其中,$R_1=\dfrac{1144+r_1}{1320}$。与《至道历》基本常数考一样,亦将冬至时刻控制在壬辰日 16±3 刻,则有 $0.13A<r_1<0.19A$,于是,$1.65<R_1<2.02$,取 $R_1=2$,则得冬至时刻小余 $r_1=1496$ 分 $=0.1868$ 日。[①]求解式(3-21),得 $n=51+364m$,于是

$$N_{1023}=3060+21\ 840m$$

欲令 $N_{1023}<10^8$,必使 $m\leqslant 4578$,将上式代入式(3-15),得

$$6756m \equiv 10\ 200 + R_2(\text{mod }11\ 261)$$

其中,$R_2=\dfrac{16+r_2}{21}$。求解上式,得

---

①比较表3-9可知,《乾兴历》冬至时刻较之其前后诸历后天2刻半以上,按理此数所差较大,但实际上,若假定 $1<R_1<3$,则有 0.02 日 $<r_1<0.35$ 日,即在33刻之范围内,只此一解,因此,冬至时刻比前后诸历差2刻多,属不得已所取之值。若取其他,所差更甚,不可用。

$$m \equiv 5522 + 3752R_2 \pmod{11\ 261}$$

同《至道历》一样，亦令$(1-0.66)A + r_1 < r_2 < (1-0.62)A + r_1$，则有$201.6 \leqslant R_2 \leqslant 216.9$。其中使$m \leqslant 4578$者，共5例，如表3-13所示。

表3-13　1023年《乾兴历》所有可能的积年

R_2	m	N_{1023}	冬至	11月经朔	r_1	r_2
215	1410	30 797 460	28.1868	26.6250	1496	4499
212	**1415**	**30 906 660**	**28.1868**	**26.6329**	**1496**	**4436**
209	1420	31 015 860	28.1868	26.6407	1496	4373
206	1425	31 125 060	28.1868	26.6486	1496	4310
203	1430	31 234 260	28.1868	26.6565	1496	4247

比较表3-9之《仪天历》与《崇天历》诸数，经朔与之最近密近者为$m = 1415$时，$N_{1023} = 30\ 906\ 660$，是为距天圣元年积年（算尽）；其距乾兴元年（1022）积年（算外）

$$N_{1021} = 30\ 906\ 658$$

正与《玉海》吻合。由此足证，鲁实先考证《玉海》所记积年朔余是正确的，而各本皆将日法误为$A = 8000$。《宋史》所载《乾兴历》积年将“九十”误书为“九百”，与《至道历》之讹误情形完全相同，甚是有趣，似非偶然。

五、《乙未元历》基本常数考

元代李谦在其《授时历议》中记述了从东汉《三统历》以迄元代《成天历》（1271）凡41部曾经颁行及2部未曾颁行的中国古历之积年、日法，其中收录的宋代《奉元》、《占天》、《淳祐》、《会天》四历及金代杨级《重修大明历》与《乙未元历》，都是至近代已经无

传的重要历法。[①]

李锐(1768～1817)曾据《授时历议》所述积年日法,将这些历法的朔余、岁余一一考证复原,成为汪曰桢编撰《历代长术辑要》的重要参考文献。李锐对这六部历法朔余、岁余的修补,也赢得了近现代几乎所有天文史家的认同与大量天文史著述的引用。

按唐宋元时期尚有多部历法失传,我们能够期望从浩如烟海的史籍中,偶然得到诸如积年日法之类的宝贵资料。利用这些数据,可以依以下所述方法,导出其朔望月与回归年常数。

假设已知日法 A(各天文常数的公分母),一般可以直接推定朔望月常数的分子 U;任取回归年常数分子之参照值为 T_1,令该历历取之数为 $T=T_1+m$,m 待定。利用该历制定前后所行用之历法,导出所求历积年数为 N_n(已知)年之冬至时刻 α,由于

$$T_1N_n\equiv\alpha_0A(\mathrm{mod}60A),N_n\equiv\alpha_1A(\mathrm{mod}60A)$$

其中,$0\leqslant\alpha_0,\alpha_1<60$,从 $TN_n=T_1N_n+mN_n$ 立得

$$\alpha\equiv\alpha_0+m\alpha_1(\mathrm{mod}60)$$

上式中 α、α_0、α_1 皆为已知数,适当调整 m,以使上式成立,可获得历取回归年

$$T=T_1+m$$

我们按上述方法,可以很容易验证李锐所考证之《奉元》、《占天》、《淳祐》、《会天》及金《重修大明》等历之回归年常数。但在推《乙未元历》回归年常数时出现了一点小问题。

1. 对李锐《乙未元历》回归年常数考证的疑问

据《授时历议》记载:

> 《乙未历》。大定二十年庚子耶律履造,不曾行用,至(至元)辛巳,后天一十九刻。积年,四千四十五万三

①元史历志(卷53). 中华书局编. 历代天文律历等志汇编(9). 北京:中华书局,1976. 3358～3368。

千一百二十六。日法,二万六百九十。[①]

根据上述文字知,《乙未元历》取日法 $A=20\ 690$,由此可得其朔望月常数

$$u=\frac{610\ 988}{20\ 690}=29.530\ 594$$

其上元起于乙未年,距金大定二十年(1180)积年

$$N_{1180}=40\ 453\ 026$$

另据《金史历志》记载,金大定年间,杨级《重修大明历》渐与天象有差,

> 乃命司天监赵知微重修《大明历》,[二]十一年历成,时翰林应奉耶律履亦造《乙未历》。[②]

关于赵知微的《知微历》,《授时历议》有如下记载:

> 重修《大明历》。大定二十年庚子赵知微重修,行一百一年,至元朝至元辛巳,后天一十九刻。[③]

按《授时历》取1280年气应(即冬至时刻)为55.06日,据《知微历》所推

$$tN_{1280}=\frac{1\ 910\ 224}{5230}\times 88\ 639\ 757\equiv 55.2520(\mathrm{mod}60)$$

得至元辛巳(1280)冬至时刻为55.2520日,与《授时历》气应相差,后天19.2刻,与记载吻合。因为1280年《乙未元历》积年 $N_{1280}=40\ 453\ 126$,假定参照值 $T_1=7\ 556\ 898$,则

$$T_1N_{1280}\equiv 28.8713A(\mathrm{mod}60A),N_{1280}\equiv 35.201\ 837A(\mathrm{mod}60A)$$

其中,日法 $A=20\ 690$。令《乙未元历》回归年常数之分子:$T=T_1+m$,则

$$tN_{1280}\equiv 28.8713+35.201\ 837m(\mathrm{mod}60)\qquad(3\text{-}22)$$

不断调整 m,以使(3-22)的余数≈55.25。当 $m=-18$ 时,得

---

①元史历志(卷53). 历代天文律历等志汇编(9). 3366～3367。

②金史历志(卷21). 历代天文律历等志汇编(9). 3207。

③元史历志(卷53). 历代天文律历等志汇编(9). 3364。

$$tN_{1280} \equiv 55.2382 (\mathrm{mod} 60)$$

由此，即得李锐所考《乙未元历》之回归年

$$t = \frac{7\,556\,880}{20\,690} = 365.2431$$

不过，按李锐所考《乙未元历》回归年常数推得1280年冬至比之《授时历》气应，后天18刻不到，与《授时历议》小有歧异，这是一个漏洞，然而更大的不合，则表现在由此所推之经朔、闰余上。由表3-14显见，李锐所考《乙未元历》岁余绝非本数。

表3-14　1280年冬至、11月经朔及闰余时刻

	$t=365.$	$u=29.$	冬至时刻	11月经朔	闰余
《授时历》	2425	530 593	55.0600	34.8750	20.1850
《知微历》	2436	530 593	55.2520	34.8757	20.3763
李锐《乙未元历》	2431	530 594	55.2382	37.6276	17.6106

2.《乙未元历》上元并非起于甲子日

按理，《乙未元历》与《知微历》同时制定，其历取回归年常数应当相近，以《知微历》回归年 $t=365.243\,595$ 推之，《乙未元历》岁实 T 当为

$$T = 365.243\,595 \times 20\,690 = 7\,556\,889.98$$

所以，可假定《乙未元历》回归年常数为

$$t = \frac{7\,556\,890}{20\,690}\text{日}$$

据《知微历》所推，金大定20年(1180)冬至时刻 =10.8925；天正11月经朔时刻 =45.5325；闰余 =25.3600。假设《乙未元历》上元起于甲子日，则大定20年距乙未上元积年 N_{1180} 所列同余式组如下

$$N_{1180} \equiv 6 (\mathrm{mod} 60) \tag{3-23}$$

$$TN_{1180} \equiv 10A + r_1 (\mathrm{mod} 60A) \tag{3-24}$$

$$TN_{1180} \equiv 25A + r_2 (\mathrm{mod} U) \qquad (3\text{-}25)$$

其中，A = 20 690 为日法；T = 7 556 890 为岁实；U = 610 988 为朔实。由式(3-23)得 $N_{1180} = 6 + 60n$，代入式(3-24)，化简之，得

$$504n \equiv 1328 + R_1 (\mathrm{mod} 2069) \qquad (3\text{-}26)$$

其中，$R_1 = \frac{560 + r_1}{600}$。将《乙未元历》所推 1180 年冬至小余控制在 89.25 ±2 刻以内，则有 $0.8725A < r_1 < 0.9125A$，于是

$$31.02 < R_1 < 32.04$$

取 $R_1 = 32$，则得冬至时刻小余 $r_1 = 18\ 640$ 分 = 0.9009 日。求解式(3-26)，得 $n = 561 + 2069m$，所以有

$$N_{1180} = 33\ 666 + 124\ 140m$$

欲令 $N_{1180} < 10^8$，必使 $m \leqslant 805$；将上式代入式(3-25)，得

$$31\ 856m \equiv 40\ 704 + R_2 (\mathrm{mod} 152\ 747)$$

其中，$R_2 = \frac{2 + r_2}{4}$，若令《乙未元历》所推该年天正 11 月经朔小余在 53 ±2 刻以内，则有

$$r_1 - 0.55A < r_2 < r_1 - 0.51A$$

于是，$1816 \leqslant R_2 \leqslant 2022$。求解上面的同余式，得

$$m \equiv 135\ 640 + 105\ 167R_2 (\mathrm{mod} 152\ 747)$$

经验证，当 $1816 \leqslant R_2 \leqslant 2022$ 时，无一能使 $m \leqslant 805$，这表明该同余式组无法获得 $N_{1180} < 10^8$ 的解。

由此证明，《乙未元历》取与《知微历》回归年相近之值时，不能求得以乙未年甲子日为起点之上元积年 N_n。

3.《乙未元历》历元为乙未年壬申日

如果我们放弃《乙未元历》上元起于甲子日的前提条件，则对于式(3-22)中 m 值的调取只需顾及小余是否在 0.25 ~ 0.26 之间即可与《授时历议》吻合。当

$$365.2420 < t = \frac{T_1 + m}{A} < 365.2460$$

时，有$|m|\leq 41$，在此范围内遍取 m，只有一例使 tN_{1280}之小余在0.25～0.26之间，如表3-15所示。

表3-15 1280年《乙未元历》冬至、11月经朔及闰余

m	T	t	冬至	11月经朔	闰余
-8	7 556 890	365.243 6	47.256 6	26.881 2	20.375 4

由于闰余表示天正11月经朔至冬至时刻的时间，故与上元起点日名干支无关。比较表3-14《知微历》与表3-15的闰余，两者同日同刻，可谓密合。由此可以推断表3-15所列诸数，当为《乙未元历》本来所推算结果。

考察表3-14与表3-15冬至与经朔之大余，两者分别相差8日，从甲子日起算，8日之外当是壬申日，可知《乙未元历》上元起于乙未岁壬申日。另据朱载堉《万年历备考》云：

《乙未历》命日起壬申。①[15]

适与以上所推吻合。中国古历上元不以甲子日为起点者，并非《乙未元历》之一孤例，除了前文所考《王睿历》以甲子岁甲午日为上元岁名日名外，宋元历法中尚有姚舜辅的《纪元历》(1106)上元起于庚辰岁己卯日，及耶律楚材的《庚午元历》(1220)上元起于庚午岁壬戌日。

由此可以确断，以上考证结果，系《乙未元历》本数。

一般说来，如果已知积年日法，均可按《乙未元历》基本常数考所述方法将其朔望月、回归年常数及历元推定。如果积年数仅知大概，或疑其有误，则可以仿照《王睿历》与《至道历》的考证方法，将所有可能的历元积年一一推出，然后再与文献记载之数进行比较，即可将其历元、回归年、朔望月常数大体断定。笔者以为，根

①转引自鲁实先："金乙未元历命算日及岁实朔实考"。本文初稿草成后，收到邹大海协助复印的鲁实先大作，仔细拜读之下，发觉鲁实先的考证结果与笔者完全相同。因鲁文与本文的考证方法有所不同，乃敢将草成文字胪陈于上。

据零星史料将残缺古历所有可能的历元推求出来进行筛选的方法，虽然较繁，但确实是可行的，其考证结果亦比较可靠（表 3-16）。

表 3-16　至道等四历积年日法朔余岁余一览表

历名	《至道历》	《王睿历》	《乾兴历》	《乙未元历》
作者	王睿	王睿	张奎	耶律履
制定年代	(宋)995	(宋)995	(宋)1022	(金)1180
上元积年	16 515 092	3 981 152	30 906 659	40 453 026
上元岁名·日名	甲子·甲子	甲子·甲午	甲子·甲子	乙未·壬申
日法 A	10 590	1700	8008	20 690
岁实 T	3 867 941	620 916	2 924 878	7 556 890
回归年 t	365.2447	365.2447	365.2445	365.2436
朔实 U	312 729	50 202	236 481	610 988
朔望月 u	29.530 595	29.530 588	29.530 594	29.530 595

注：表中上元积年系上元至制历之年积年数，算尽。

本节所举的四例，虽皆宋金历法，但其推考方法却具有一般意义，适用于中国历史上废除积年日法之前各时期的残缺历法之基本常数的考证。

第三节　中国古代岁差常数研究

我们所讨论的日月岁差是因太阳与月亮对地球赤道一带隆起部分的摄动作用所造成的地轴进动而产生的，它在天球上的一个表现，即春分点沿黄道缓慢的西退。

古希腊天文学家希帕恰斯（Hipparchus，公元前 2 世纪）通过比较不同年代测定的某些恒星之黄经的变化，最先指出了岁差现象。我国晋代天文学家虞喜（281～356）则是通过对历史文献的考证，发现冬至点赤道宿度的变化而提出岁差之说的。

在中国传统历法的天文常数系统中，岁差（恒星年）是一个很重要的"导出常数"。如此定义的原因在于，其历取数据通常是经过附会某个由"基本常数"朔望月及回归年所确定的历元而调整

选择出来的。因了中国古代数理天文学的这个特性，使得我们有可能复原当时的历法家调取岁差常数的算法，甚至可以期望由此修正或恢复某些讹误或失传的历取岁差数据。

一、历取岁差常数的选择算法

中国传统历法中之天文常数通常皆以分数表示，令回归年：$t = T/A$，恒星年[①]：$s = S/A$，则

$$岁差\ p = s - t$$

设上元冬至点起虚宿 q 度，算外，则计算上元以来第 N_n 年之冬至点宿度常以下列二式之一入之

$$tN_n \equiv \alpha(\text{mod} s),\ 0 \leqslant \alpha < s \tag{3-27}$$

$$pN_n \equiv \beta(\text{mod} s),\ 0 \leqslant \beta < s \tag{3-28}$$

显然，$\alpha + \beta = s$。由式(3-27)知，从虚宿 q 度起算，α 度之外为当年冬至点所在；由式(3-28)知，从虚宿 q 度倒数 β 度，即上元以来第 N_n 年冬至点所在。同回归年长度相比，岁差 p 要小得多，因此，式(3-28)比式(3-27)用起来简捷许多。由式(3-28)可得

$$(N_n - m)p = \beta + tm \tag{3-29}$$

假定所求年冬至点距虚 5 度 $=\beta_0$ 度。倘设若调取到合适的 m，使式(3-29)中 $|\beta - \beta_0| < 5$，则导得岁差常数 p 所推之上元应起于虚宿某度（因为虚宿共约 10 度）。这是调取历用岁差值的一个必要条件。设周天分 S 取 k 位小数，则无妨令

$$\frac{(\beta_0 A + mT) \times 10^k}{N_n - m} = (S - T) \times 10^k + \delta \tag{3-30}$$

其中，δ 表示将弃去之余分。由式(3-29)与(3-30)即得

---

①由于中国传统数理天文学按平太阳每日运行一度来定义周天的"弧度"，因此，在数值上，周天度与恒星年是相同的。所以，对许多历法来说，周天 s 同时表示恒星年（日）与周天的长度（度）。

$$|\delta| = \frac{|\beta - \beta_0| \times A \times 10^k}{N_n - m}$$

因为 $N_n \approx (N_n - m)$，令 $|\beta - \beta_0| < 5$，则有

$$|\delta| < \frac{5A \times 10^k}{N_n} \tag{3-31}$$

时，按式(3-30)所得之岁差 $p = s - t$ 为历法可取之值。换句话说，当不断调整 m，使式(3-30)中之 δ 满足式(3-31)时，所得岁差常数 p 即可满足上元冬至点落在虚宿之内的条件。

对式(3-30)中 m 的调取，可以设计一套简单的操作方案。假令历法家取岁差参照值为 p_0(如《大衍历》令 $p_0 = 0.0120$)，于是，由式(3-29)可得 m 之参照值

$$m_0 = \left[\frac{p_0 N_n}{t}\right] \tag{3-32}$$

令 $m = m_0 + \Delta m$，设

$$\theta(m) = \frac{\beta_0 A + mT}{N_n - m}, \varphi(m) = \frac{T}{N_n - m} \tag{3-33}$$

则有

$$\theta(m) \approx \theta(m_0) + \varphi(m_0)\Delta m \tag{3-34}$$

其中，$\theta(m_0)$与 $\varphi(m_0)\Delta m$ 皆为已知数，不断增减 Δm，若令 S 取 k 位小数，则只需将式(3-34)中之$[\theta(m_0) + \varphi(m_0)\Delta(m)] \times 10^k$ 的小数部分与式(3-31)的条件相配合，就能顺利计算出所有可能成为历取岁差值的 $m = m_0 + \Delta m$。将此 m 代入式(3-30)，弃去余分 δ，立得可能的历取岁差常数 p。

二、早期历法岁差常数的选择与考证

一行的《大衍历》之前，共有 8 部历法引入岁差计算，除《皇极历》与《神龙历》取黄道岁差外，其余皆为赤道岁差。它们所采用的赤道坐标均为汉代落下闳测定的 28 宿距度。这一时期历法的

岁差常数 p 在 0.0218～0.0054 度/年之间浮动，取值极不稳定。造成这种情形的原因主要有如下两点：

其一，对秦汉以来的冬至点宿度的测定成果未能进行科学和细致的甄别鉴定，因此，由这些数据本身导得的岁差值差别很大，往往顾此失彼。

其二，此间历法周天分 S 多为整数，因此，历法家按式(3-30)调取岁差常数 p 时，难免不给其精度带来创伤。下文的分析将表明，这一点对这时期历取岁差常数的精度之影响尤其显著。

1.《大明历》岁差常数的选择

选择历取岁差数据的预备工作是，测定治历时冬至点宿度并推算岁差常数之参照值 p_0。据《宋书律历志》称：

> 大明六年，南徐州从事史祖冲之上表曰：……改易者……其二，以《尧典》云："日短星昴，以正仲冬。"以此推之，唐代冬至日在今宿之左五十许度。汉代之初，即用秦历，冬至日在牵牛六度。汉武改立《太初历》，冬至日在牛初。后汉《四分法》，冬至日在斗二十一。晋时姜岌以月蚀检日，知冬至在斗十七。今参以中星，课以蚀望，冬至之日在斗十一。通而计之，未盈百载，所差二度。①

由上述文字知，祖冲之造《大明历》时，测得冬至点在斗 11 度，又据《尧典》及秦汉以来的诸次冬至点测定结果，导得岁差参照值 $p_0 \geq 0.02$ 度/年，即"未盈百载，所差二度"。应当注意的是，汉代太初元年(公元前 104)造《太初历》以来，历家多采用 19 年 7 闰制，此闰周置闰稍多，历久便造成了历法后天现象，至晋代姜岌《三纪甲子元历》时，冬至后天已达三日之多。刘宋元嘉年间(434～443)何承天连续十年以土圭测影，方使冬至后天得以纠

①宋书律历志(卷 13). 历代天文律历等志汇编(6). 1743。

正。[①] 因此,表 3-17 所列祖冲之估算岁差参照值时,便考虑到汉代以来冬至时刻的误差。由表 3-17 可知,通而计之,祖冲之岁差参照值大约 40 年/度,即 $p_0 = 0.025$ 度/年。

表 3-17 祖冲之对岁差常数的估算

年代	冬至点	冬至误差	距斗 11 度	距 463 年	p(年/度)	大明历冬至点
-2350	危		50	约 2800	56	危 16.96
-206	牛 6		21	670	31.9	牛 0.54
-104	牛初	1 日	14	568	40.9	斗 24.32
85	斗 21	2 日	8	378	47.2	斗 20.20
384	斗 17	3 日	3	79	26.3	斗 13.69

另据《大明历》,[②]大明七年(463)距大明上元积年 $N_{463} =$ 51 939,《大明历》回归年

$$t = 14\,423\,804/39\,491$$

根据式(3-31)与式(3-32)(令 $k=0$),得 $|\delta| \leqslant 3.8$, $m_0 = 3$。其中,$|\delta| \leqslant 3.8$ 表示 m 一定时,按式(3-30)可以获得 7 个左右的岁差值 p,皆保证上元冬至点落在虚宿之内。所有结果如表 3-18 所示。

表 3-18 《大明历》所有可能的岁差常数(463)

m	S - T	p/(年/度)	β	上元起度	冬至点
2	588	67.16	42.8436	虚 8	斗 11.42
3	**860**	**45.92**	**35.3095**	**1**	**11.96**
3	861	45.87	36.6247	2	11.64
3	862	45.81	37.9398	3	11.32
3	863	45.76	39.2550	4	11.01
3	864	45.71	40.5701	6	11.69
3	865	45.65	41.8853	7	11.38
3	866	45.60	43.2005	8	11.06
4	1138	34.70	35.6525	1	11.61

注:463 年冬至点 = 斗 26 + 牛 8 + 女 12 + 入虚分 0.2646 + 上元起度 − β。

①宋书律历志(卷 12). 历代天文律历等志汇编(6). 1717 ~ 1718。
②宋书律历志(卷 13). 历代天文律历等志汇编(6). 1745 ~ 1758。

尽管岁差值在34.70～67.16年/度之间有七例可使大明上元冬至点起虚宿，但它们的岁差值皆集中在45.60～45.92年/度之间，亦即在大约32年/度的区间选择《大明历》岁差，其结果只能取45.76±0.16年/度为其历用岁差常数。其原因主要是令周天分S为整数，因而按式(3-30)调取S势必对其岁差常数精度造成很大影响。

另外，由表3-18知，大明七年《大明历》所推冬至点在斗11.96，将近斗12，这与祖冲之所称在斗11相差近1度，倘若按斗12计算表3-17中诸岁差值，则与“未盈百载，所差二度”的估算更加吻合。

2.《大同历》岁差常数考证

虞邝《大同历》的基本常数见载《开元占经》及《隋书律历志》，据后者记述：

> 大同十年，制诏更造新历，以甲子为元，六百一十九为章岁，一千五百三十六为日法，一百八十三年冬至差一度。[①]

由此可知《大同历》造于梁大同十年(544)，取回归年常数为

$$t = 14\ 469\ 521/39\ 616$$

以$p=183$年/度为岁差。另据一行《大衍历议》称：

> 梁武帝据虞邝历，百八十六年差一度。[②]

《隋书》与《新唐书》哪一个记载更准确呢？我们试以前述算法对《大同历》岁差常数做番演算。据《开元占经》载，大同十年距大同上元积年$N_{544}=1\ 025\ 701$(算尽)(文献[3]，752～760)。一行《大衍历议》又称：

> 大同九年，虞邝等议：“……自汉至今，将二百年，而

①隋书律历志(卷17). 历代天文律历等志汇编(6). 1889。

②新唐书历志(卷27上). 中华书局编. 历代天文律历等志汇编(7). 北京：中华书局，1976，2182。

冬至在斗十二度。”①

假定虞门取岁差参照值 $p_0=0.0054$ 度/年，约合 185 年/度，则由式(3-31)与式(3-32)知，$|\delta|\leqslant 0.1931$，$m_0=15$。于是令 $\beta_0=39$，在 15 的附近调整 m，当式(3-30)中之 $|\delta|\leqslant 0.1931$ 时，所得 p 即可作为《大同历》可能的岁差常数($k=0$)。所有可能的选择如表 3-19 所示，在 127～199 年/度之间，只有 $p=0.0054$ 度/年，合 185.99 年/度，适与一行所述吻合。

由此足证，虞门《大同历》取 $p=213/39\ 616$(度/年)为其岁差常数，约合 186 年/度。

表 3-19　《大同历》所有可能的岁差常数(544)

m	$S-T$	p/(年/度)	β	上元起度	冬至点
14	199	199.08	38.8333	虚 5	斗 12.42
15	**213**	**185.99**	**36.0537**	**虚 2**	**斗 12.20**
22	312	126.97	42.4673	虚 9	斗 12.78

注:544 年冬至点 = 斗 26.2497 + 牛 8 + 女 12 + 上元起度 − β，入斗宿。

3.《武平历》岁差常数

刘孝孙《武平历》(576)是南北朝末期一部很重要的历法，它的太阳运动理论不仅考虑了岁差现象，而且首次引入了太阳视运动不均匀性的计算(文献[7])。但由于北齐灭亡(577)，此历未及采用，其历术也几乎丧失殆尽。《武平历》岁差常数载于《开元占经》，取

$$t=\frac{8\ 817\ 363}{24\ 141},p=\frac{509}{24\ 141},s=365\frac{6407}{24\ 141}$$

其中，6407 称为虚分，表示周天度 s 的余数系于虚宿。据《隋书律历志》记载，刘孝孙称：

至今大隋甲辰之岁，考定历数象，以稽天道，知冬至

①新唐书历志(卷 27 上)．历代天文律历等志汇编(7)．2198。

之日日在斗十三度。①

按 584 年距武平上元积年 $N_{584}=435\ 101$，于是有

$$pN_{584}=42.2356(\mathrm{mod}\,s)$$

由此可知，584 年《武平历》所推冬至点距武平上元起度为 $\beta=42.2356$ 度。设如《隋书》所记，此岁冬至点在斗 13 度，则推得上元应起虚 9 度，于是按

$$斗26+牛8+女12+虚9.2646-\beta=斗13.03度$$

与前引文献相合。不过《开元占经》称，刘孝孙《武平历》之"冬至命度起危前五度"，相当于上元命起虚五度，与上述推算有差，这是怎么回事呢？我们可以从一行《大衍历议》中找到原因：

刘孝孙《甲子元历》，推太初冬至在牵牛初，下及晋太元、宋元嘉皆在斗十七度。开皇十四年在斗十三度。而刘焯历仁寿四年冬至日在黄道斗十度，于赤道斗十一度也。其后孝孙改从焯法，而仁寿四年冬至，日亦在斗十度。②

按上元起虚 9 度，推得太初元年（公元前 104）冬至点在牛 1.54 度；晋太初九年(384)在斗 17.21 度；宋元嘉十年(433)在斗 16.21 度；开皇十四年(594)在斗 12.81 度，基本上与一行所记吻合。

而刘焯《皇极历》取黄道岁差推得仁寿四年(604)冬至点在黄道斗 10 度，合赤道斗 11 度，此数与实际天象更近，因此，刘孝孙在《武平历》制定后若干年，又将上元起度改为虚 7 度，③以附合《皇极历》推定当时冬至点宿度，此时《武平历》所推仁寿四年冬至点在斗 10.61 度，与一行所说"日亦在斗十度"吻合。

---

①隋书律历志（卷 17）．历代天文律历等志汇编(6)．1898。

②新唐书历志（卷 27 上）．历代天文律历等志汇编(7)．2199。

③虚 7 度 = 危前 3 度，而《开元占经》所记"危前五度"应系"危前三度"之误。

4.《神龙历》岁差常数

据《旧唐书历志》可知,[①]南宫说之《神龙历》上元至神龙元年(705)共积 $N_{705}=414\ 360$ 年(算外)。历取回归年 $t=365.2448$,周天度 $s=365.257\ 113$,上元冬至点在牵牛初,于是由

$$tN_{705} \equiv 11.5849(\mathrm{mod}\,s)$$

知,神龙元年冬至点应在女 11.5849 度。这与当时天象相去太远。常数肯定有误。另据《开元占经》,《神龙历》周天度 $s=365.257\ 171$,于是岁差 $p=0.012\ 371$,由

$$pN_{705} \equiv 12.4472(\mathrm{mod}\,s)$$

知,神龙元年冬至点距上元起点牛初 12.4472 度。因《神龙历》"其术有黄道而无赤道",[②]故以《麟德历》所记黄道距度步之,得神龙元年冬至点在黄道斗 11.81 度(=24.2572-12.4472),与《麟德历》冬至日躔黄道南斗 12 度相合。

实际上,假定《神龙历》取岁差参照值 $p_0=0.0123$,则由式(3-32),得 $m_0=14$。设上元冬至在牛初,则以黄道度取神龙元年在斗 11 度左右,可令 $\beta_0=13$,按式(3-31),$|\delta|\leq 2.4$,取 $k=2$,在 14 附近调取 m,据式(3-30)可得所有以牛初为起点,而神龙元年在黄道斗 11 度附近的岁差值,如表 3-20 所示。

表 3-20 《神龙历》所有可能的岁差值(544)

m	p	$s-365$	p/(年/度)	β	冬至点
13	0.011 491	256 291	87.02	13.0789	斗 11.18
14	0.012 370	257 170	80.84	12.0328	12.22
14	**0.012 371**	**257 171**	**80.83**	**12.4472**	**11.81**
14	0.012 372	257 172	80.83	12.8615	11.40
14	**0.012 373**	**257 173**	**80.82**	**13.2759**	**10.98**
15	0.013 254	258 054	75.45	13.0566	11.20

注:544 年冬至点宿度 = 黄道斗 24.26 $-\beta$,β 为冬至点距牛初黄道度。

①旧唐书历志(卷 33). 历代天文律历等志汇编(7). 2041~2043。

②新唐书历志(卷 26). 历代天文律历等志汇编(7). 2165~2166。

按《神龙历》周天分 S 取两位小数，上元起于牛初，则岁差在 75.5～87 年/度之间取数时，历取岁差值只能在 80.83±0.01 年/度之内。有趣的是，表 3-20 不仅给出了《开元占经》所记之周天分度值，而且导出了另一个极可能的岁差选择：$p=0.012\ 373$，倘此数不误，则有周天 $s=365.257\ 173$。于是，《旧唐书》所记 $s=365.257\ 113$，系脱文（七）而误；《开元占经》所记 $s=365.257\ 171$，系形近（三）而误。两者均符合古文的讹误常例。不过，在找到更确凿证据之前，无妨仍以《开元占经》为准。

5.《大业历》岁差常数分析

假定以《皇极历》[①]岁差为参照，取 $p_0=0.0130$，按仁寿四年（604）冬至在斗 11 度，可取 $\beta_0=39$，因 604 年距大业上元积年 $N_{604}=1\ 427\ 641$，《大业历》回归年

$$t=15\ 573\ 963/42\ 640$$

因此，由式（3-32）知，$m_0=50$，由于《大业历》周天分 S 取整数，所以，由式（3-31），当 $|\delta|\leqslant 0.15$ 时，可使所推岁差在上元命起虚宿。于是，在 50 附近调整 m，以使式（3-30）中 $|\delta|\leqslant 0.15$ 者为合用岁差 $p(k=0)$。

据《隋书律历志》记载，《大业历》前身是张胄玄于开皇十七年（597）所造之历，命冬至起虚 5 度，推合当时冬至点在斗 11 度。大业四年刘焯去世后，张胄玄将其历上元冬至起点改为虚 7 度，由此推得当年冬至点在斗 13 度。

由表 3-21 可知，若按 604 年冬至点在斗 11 度，则在83～86.5 年/度之间选择《大业历》岁差，必取 $S-T=503$，此数正是《大业历》岁差分；若按冬至点在斗 13 度，则在 70～86.5 年/度之间选择，只能取 $S-T=503$ 为《大业历》岁差分。

---

①隋书律历志（卷 17）. 历代天文律历等志汇编（6）. 1907～1928。

表 3-21 《大业历》所有可能的岁差常数(604)

m	$S-T$	p	p/(年/度)	β	上元	冬至点	上元	冬至点
56	612	0.0144	69.67	36.1185	虚 1	斗 11.14		
47	514	0.0121	82.96	42.3793	虚 8	斗 11.88		
46	**503**	**0.0118**	**84.77**	**39.3524**	**虚 5**	**斗 11.90**	**虚 7**	**斗 13.90**
45	492	0.0115	86.67	36.3254	虚 2	斗 11.93		

6. 小结

通过前面的计算可以发现，这个阶段的历法由于将周天分 S 定为整数($k=0$)，而其法度 A 则通常仅仅数万，因此，历法依式(3-30)调取周天分 S 时，往往需要较大的选择空间，其岁差值的振幅常达数十年/度之多，对岁差常数 p 的精度要求并不很高。

历取值 p 是否精确，并不能完全反映出治历者的测算水准，因为据式(3-30)附会既定上元而调取岁差 p 的过程中，具有很大的或然性，历取值有可能与参照值相差极大，例如，李淳风《乙巳元历》(629)，[16] 度法 $A=1340$，令周天分 S 为整数时，则当岁差 $p>27$ 年/度，或者 $p<0.0373$ 度/年时，其历取岁差值只能为 $1340/13=103.08$ 年/度。

三、唐宋金元历法岁差常数分析

根据前面的讨论可以看出，要想提高历取岁差值的精度，使之比较准确地反映出治历者的测算水准，可以采用周天分 S 不必为整数的方案，如此一来，据式(3-30)调取周天分 S 的机会便增加许多，对岁差值精度的创伤自然减小。① 《大衍历》以后，普遍对历取

①《神龙历》实际上已经这样做了，它将 S 取二位小数。不过，由于该历限定上元冬至日在牛初，不如其他各历命起虚宿的范围宽泛，两相消之，仅相当于对 S 增立一位小数。

周天分 S 设二位小数,致使岁差常数的选择精度大大提高。

1. 唐宋金元历法岁差常数概述

从一行《大衍历》至郭守敬《授时历》,共有 23 部历法存有岁差常数,表 3-22 所列其中 18 部历法的岁差 p,大致将这个阶段的岁差与岁余沿革做了一个概括。其中回归年参照值系指历法家令岁分 T 为整数时,据此可获得其历取回归年。例如,《大衍历》日法 $A=3040$,假令回归年的参照值 $=365.2445$,则由

$$365.2445A = 1\ 110\ 343.28, \text{得回归年} = 1\ 110\ 343/3040$$

表 3-22　唐宋金元历法岁差值概况

历名	年代	回归年 365	周天度 365	p	回归年参照值
大衍历	唐·724	244 408	256 469	0.0120	365.2445
宣明历	唐·822	244 643	256 428	0.0118	365.2446
崇玄历	唐·892	244 518	256 388	0.0119	365.2445
乾元历	唐·981	244 898	256 379	0.0115	365.2446
仪天历	宋·1001	244 555	256 336	0.0118	365.2446
崇天历	宋·1024	244 570	256 373	0.0118	365.2446
明天历	宋·1064	243 590	256 482	0.0129	365.2436
观天历	宋·1092	243 558	256 406	0.0128	365.2436
统元历	宋·1135	243 579	256 403	0.0128	365.2436
纪元历	宋·1106	243 621	257 231	0.0136	365.2436
乾道历	南宋·1167	243 600	257 235	0.0136	365.2436
会元历	南宋·1191	243 721	257 290	0.0136	365.2437
知微历	金·1180	243 595	256 798	0.0132	365.2436
庚午元历	元·1220	243 595	256 784	0.0132	365.2436
统天历	南宋·1199	2425	2575	0.0150	365.2425
开禧历	南宋·1207	243 077	257 929	0.0148	365.2431
成天历	南宋·1271	242 722	257 495	0.0148	365.2427
授时历	元·1280	2425	2575	0.0150	365.2425

《大衍历》之后,回归年长度的演进大约经历了三个阶段,周琮《明天历》之前,各历基本上以 365.2446 为参照值来选取其回归年常数。《明天历》开始,以 365.2436 为参照值,直至南宋杨忠辅《统天历》始创岁实消长法,其参照值方有所改变。《统天历》与《授时历》之间

的南宋历法,因未采用岁实消长法,故回归年长度比之 365.2425 稍大一些,这样在推合前代天象记录时才能更吻合些。

另一方面,周天度的变化大致也经历了三个阶段,《大衍历》的 $s=365.2564$ 度一直影响到宋代陈得一的《统元历》,然而周天度的改变却始于稍早一些姚舜辅的《纪元历》,姚舜辅增大周天度的根据可能来自崇宁年间他领导的一次精度很高的恒星观测(1102~1106),这次大规模观测的最大收获,就是《纪元历》中采用的赤道宿度表。

由此导得《大衍历》之后岁差常数 p 的递变,大致如表 3-23 所示。我们将《明天历》之前各历归于大衍类;《明天》、《观天》、《统元》为明天类;《纪元历》至《会元历》的南宋历法为纪元类。此间金朝的《重修大明历》、《乙未元历》及《知微历》统归知微类。

表 3-23 中国古历岁差常数演进

类别	朝代	回归年参照值	周天度参照值	p	p/(年/度)
大衍	唐·宋	365.2446	365.2564	0.0118	84.75
明天	宋	365.2436	365.2564	0.0128	78.12
纪元	宋·南宋	365.2436	365.2572	0.0136	73.53
知微	金·元	365.2436	365.2568	0.0132	75.75
统天	南宋	365.2427	365.2575	0.0148	67.57

比较有趣的是,《明天》、《纪元》、《知微》三类历法回归年相同,而其周天度为等差数列,知微类历法的岁差 p 系据明天类与纪元类的算术平均值而来。金朝历法对元代诸历影响颇大,《庚午元历》悉本《知微历》即是明证。由于《统天历》之后各历多不取用岁实消长术,因此,我们将此后各南宋历法岁差 $p=0.0148$,并称为统天类历法。

就岁差的演变来看,《大衍历》之后大约历经了表 3-23 所示的五个阶段。下文除了逐类分析这种分类的合理性,并由此证实表 3-23 大致刻画了中国古代历法中唐代之后岁差常数的客观演进

过程，而且分类恢复各个历史时期失传的若干历法之岁差常数。

2. 大衍类岁差常数分析

在《大衍历》与《明天历》之间，至少存在13部历元可考的历法，其中除《应天历》(962)常数存疑外，另有《至道》等三历岁差常数失传。在恢复这些常数之前，需对其余9历做些分析，我们先从《大衍历》开始。

(1)《大衍历》岁差常数的选择。假定一行取岁差参照值 $p=0.012$ 度/年，因为724年距大衍上元积年 $N_{724}=96\ 961\ 740$，而且回归年 $t=1\ 110\ 343/3040$，所以据式(3-31)与式(3-32)，分别得 $m_0=3185$，$|\delta|\leqslant0.0157(k=2)$。按当年冬至点在斗10度，可令 $\beta_0=40$，由式(3-33)，得

$$\theta(m_0)=36.4750,\varphi(m_0)=0.011\ 451\ 728$$

按式(3-34)调整 Δm，当

$$100\theta(m)=100(S-T)+\delta$$

中之 $|\delta|\leqslant0.0157$ 时，所得岁差 p 可保证上元冬至点在虚宿。$m_0=3185$ 附近的几个结果如表3-24所示。显而易见，《大衍历》所取岁差常数 $p=36.57/3040$ 是 $p_0=0.012$ 的最佳选择。关于一行取岁差参照值 $p_0=0.012$ 的根据，在《大衍历》中有充分的论述，此处不赘述。①

表3-24　《大衍历》可能的岁差常数(724)

m	$S-T$	p	p/(年/度)	β	上元	冬至点
3154	36.12	0.0119	84.16	40.2317	虚5	斗10.77
3209	**36.75**	**0.0121**	**82.72**	**44.5156**	**虚9**	**斗10.48**
3216	36.83	0.0121	82.54	39.2602	虚4	斗10.74

注：724年冬至点宿度 = 斗26 + 牛8 + 女12 + 上元起度 $-\beta$。

①新唐书历志(卷27上)．历代天文律历等志汇编(7)．2181～2199。

(2)《五纪历》与《正元历》岁差常数。《大衍历》之后唐代历法岁差 $p=0.0118$ 左右，唯独《五纪历》(762)与《正元历》(784)取 $p=0.0110$ 度/年，与其他历法相差颇大。按《五纪历》762 年距上元积年 $N_{762}=269\ 978$，回归年 $t=489\ 428/1340$，[①]假令其岁差参照值 $p_0=0.012$，据式(3-31)与式(3-32)，分别得 $m_0=8$，$|\delta|\leqslant 2.48$ $(k=2)$。欲推当年冬至点在斗 10 度，则可令 $\beta_0=40$。

由于 $|\delta|\leqslant 2.48$，表明 m 一定时，据式(3-30)可以导出 5 例左右的岁差 p。当我们分别取 $m=8,9$ 时，由式(3-30)导得的岁差值列如表 3-25。

表 3-25　《五纪历》所有可能的岁差常数(762)

m	$S-T$	p	p/(年/度)	β	上元	冬至点
8	**14.70**	**0.0110**	**91.16**	**39.6530**	**虚 4**	**斗 10.35**
8	14.71	0.0110	91.09	41.6677	6	10.33
8	14.72	0.0110	91.03	43.6824	8	10.32
9	16.51	0.0123	81.16	39.0569	3	9.94
9	16.52	0.0123	81.11	41.0716	5	9.93
9	16.53	0.0123	81.06	43.0863	7	9.91

按理，$p=0.0123$ 应是更好的选择，但《五纪历》未采用，可能是嫌此岁差 p 稍大的缘故。对于 $p=0.0110$ 的几种选择，《五纪历》取 $S-T=14.70$，显系为了使上元命起虚中，这一点在大衍类历法中颇为常见。至于《正元历》岁差，则系贴合《五纪历》的结果。这段插曲，是大衍类岁差常数的例外，对其主流趋势未造成任何大的影响。

(3)《乾元历》岁差常数。唐代历法中，吴昭素的《乾元历》是一部比较粗劣的历法，其基本常数朔望月与回归年皆十分粗疏。历取岁差值 $p=0.0115$ 度/年，也与大衍类参照值 $p=0.0118$ 差误

---

①新唐书历志(卷 29)．历代天文律历等志汇编(7)．2275 ~2278。

较大,由于它的周天分 S = 1 073 853.755 35,因此按式(3-30)调取其岁差 p 时拥有充足的选择余地,几乎可以令历取值与参照值 p_0 完全吻合。这一点也是唐宋元历法中一个少见的例外。

那么,《乾元历》取 $p_0=0.0115$ 为其岁差参照值的理由何在呢?一个合理的解释即,《乾元历》回归年较大,而其周天度欲与大衍类之365.2564相合,于是取两者之差立得 $p_0=0.2564-0.2449=0.0115$。

(4)《仪天历》岁差常数。1001年《仪天历》[①]距上元积年 $N_{1001}=716\ 498$,回归年 $t=T/A=3\ 688\ 970/10\ 100$,令 $p_0=0.0118$,$\beta_0=43$,则根据式(3-31)与式(3-32)可得:$m_0=23$,$|\delta|\leqslant 7.05$($k=2$)。$|\delta|\leqslant 7.05$ 表示对任一给定的 m,按式(3-30)可推出14例左右的岁差值 p 使上元起于虚宿。

因为 $\theta(23)=119.0280$,所以 $118.96\leqslant S-T\leqslant 119.09$ 时,所有14个岁差值皆满足上元起于虚宿之条件,此时 $p=0.0118$ 度/年。

又 $\theta(24)=124.1770$,由此得 $124.11\leqslant S-T\leqslant 124.24$ 皆为可能的岁差分,此时 $p=0.0123$ 度/年。

而 $\theta(22)=113.8791$,由此得 $113.81\leqslant S-T\leqslant 113.94$ 皆为可能之岁差分,此时 $p=0.0113$ 度/年。

因此,当 $0.0113\leqslant p_0\leqslant 0.0122$ 时,《仪天历》所取岁差值只能为 $p=0.0118$。

(5)《崇天历》岁差常数。1024年《崇天历》[②]距上元积年 $N_{1024}=97\ 556\ 341$,回归年 $t=T/A=3\ 867\ 940/10\ 590$,令 $p_0=0.0118$,$\beta_0=43$,则根据式(3-31)与式(3-32)可得 $m_0=3178$,$|\delta|\leqslant 0.0543$($k=2$)。在 $m_0=3178$ 附近调取 m,凡式(3-30)中 $|\delta|\leqslant 0.0543$ 时,所得岁差 p 为可用之值,其结果如表3-26所示。其中 $S-T=125.02$ 为《崇天历》所取

①宋史律历志(卷68). 历代天文律历等志汇编(8). 2449~2450。
②宋史律历志(卷71~72). 历代天文律历等志汇编(8). 2568~2583。

岁差分，而$S-T=126.17$则系该历后来更改的岁差分。① 前者岁差值p与《仪天历》相同，而后者周天度s则与《明天历》吻合。

表 3-26　《乘天历》所有可能的岁差常数(1024)

m	$S-T$	p	$s=365.$	β	上元	冬至点
3151	124.94	0.0118	256 368	39.3408	虚 1	斗 7.66
3152	124.98	0.0118	256 370	42.5459	4	7.45
3153	**125.02**	**0.0118**	**256 373**	**45.7619**	**7**	**7.24**
3180	126.09	0.0119	256 477	40.4857	2	7.51
3181	126.13	0.0119	256 479	43.7021	5	7.30
3182	**126.17**	**0.0119**	**256 481**	**46.9183**	**8**	**7.08**

总而言之，《大衍历》之后，周天度大体在 365.2564 度取值，由此导得之岁差常数p基本上以 0.0118 度/年为各历参照值。

3. 明天类岁差常数分析

《明天历》周天度s与朔望月u之比值为$s/u=1979/160$，它是以一种独特的数值逼近算法获得其岁差值$p=s-t$的，此算法的讨论稍微复杂一些，我们将另文述之。明天类历法至少有 5 部，除了《观天》、《统元》等三历常数尚存外，《奉元历》(1074)与《占天历》(1103)岁差皆已失传。

这个时期进行了几次较大规模的恒星观测，修正了一行开元年间制定的赤道宿度。不过，从《明天历》与《观天历》来看，它们仍然采用的开元赤道宿度。周琮的一大贡献，是将唐初以来几未改变的回归年长度修改为 365.2436，精度大为提高，与此同时，他在未改变大衍类周天度参照值的情形下，取得的岁差值亦较前代精确。

表 3-23 中，我们指出明天类岁差常数参照值$p_0=365.2564-$

①宋史律历志(卷 73)．历代天文律历等志汇编(8)．2626。

365. 2436 = 0. 0128，其根据主要从《观天历》与《统元历》的周天度与回归年长度推断而来。实际上，它们的回归年以 365. 2436 为参照值应无疑问，而《明天历》选择周天度 s 的算法本身导致了它与 365. 2564 产生些微的误差。《观天历》与《统元历》则很明显以 365. 2564 为其周天度参照值，为了进一步证明这个推断，且看《观天历》岁差常数之选择。

1092 年，《观天历》上元积年 N_{1092} = 5 944 809，其回归年 t = 4 393 880/12 030，令 p = 0. 0128，β_0 = 45，根据式(3-31)与式(3-32)可得：m_0 = 208，$|\delta| \leq 1.01$(k = 2)。于是据式(3-30)，在 m_0 = 208 附近调取岁差 p，令 $|\delta| \leq 1.01$ 者为可能的选择，所有情形如表 3-27 所示。

表 3-27　《观天历》岁差常数选择(1092)

m	$S-T$	p	s = 365.	β	上元	冬至点
208	153. 83	0. 012 788	256 346	44. 1340	虚 4	斗 5. 87
208	153. 84	0. 012 788	256 346	49. 0755	9	5. 92
209	**154. 57**	**0. 012 849**	**256 407**	**44. 5471**	**4**	**5. 45**
209	154. 58	0. 012 849	256 407	49. 4886	9	5. 51
210	155. 31	0. 012 910	256 468	44. 9602	4	6. 04

注：《明天历》推得 1092 年冬至日在斗 5. 93，按开元赤道宿度。

比较表 3-27 与表 3-22，$S-T$ = 155. 31 时，所得岁差 p 与周天度 s 皆与《明天历》最近，但此数非《观天历》所取；而当 $S-T$ = 153. 84 时，所推冬至点几乎吻合《明天历》之数，但它亦非《观天历》所取。《观天历》所取 $S-T$ = 154. 57，使得周天度最与 365. 2564接近。由此足证，它系以此数为其周天度参照值。

表 3-28 所示 724 年及 1100 年分别按开元(一行，724)、皇祐(周琮，1049 ~ 1053)、崇宁(姚舜辅，1102 ~ 1106)赤道计算了明天类及《大衍》、《纪元》等历的冬至点宿度，其中《明天历》与《统元

历》所推完全吻合，按《明天历》原文称上元起虚六，[①]而实际上虚6算尽 = 虚5算外，这一点可从表3-28得到证明。

表 3-28　明天类历法岁差比较(1100)

历名	上元	p/(年/度)	724年冬至点开元赤道	冬至点开元赤道	冬至点皇祐赤道	冬至点崇宁赤道
明天历	虚5	77.57	斗10.67	斗5.82	斗2.82	
观天历	4	77.83	10.18	5.35	2.35	
统元历	4	77.98	10.64		2.82	斗3.32
大衍历	9	82.72	10.47	5.93		
纪元历	7	73.48	10.39			2.77

注：皇祐赤道：斗25、牛7、女11；崇宁赤道：斗25、牛7.25、女11.25。

由于姚舜辅《纪元历》中赤道宿度之下称："如考唐，用唐所测；考古，用古所测，即各得当时宿度。"[②]因此，比较周琮《明天历》皇祐赤道与《纪元历》崇宁赤道所推冬至点，可以看出两者十分相近。

故此，在恢复明天类历法失传岁差常数时，除了注意周天度 s 逼近参照值365.2564之外，还需适当考虑所推冬至点宿度与《明天历》之误差。

4. 知微类历法岁差常数

此类历法包括金代杨级《重修大明历》(1127)，耶律履的《乙未元历》(1180)和赵知微《知微历》(1180)，以及元代耶律楚材的《庚午元历》(1220)。《杨级历》很可能受到《纪元历》的某些影响，[③]因此，这些历法推求冬至日度所采用的坐标应该皆是崇宁赤道宿度，这一点可以从《知微历》及《庚午元历》的历术中得到证实。

《重修大明历》的出现，介于《纪元历》与《统元历》之间，三者

①宋史律历志(卷74). 历代天文律历等志汇编(8). 2652。
②宋史律历志(卷79). 历代天文律历等志汇编(8). 2804。
③金史历志(卷22). 历代天文律历等志汇编(9). 3207。

回归年长度相同,而《纪元历》周天度 $s=365.2572$,《统元历》周天度 $s=365.2564$,赵知微《知微历》时取 $s=365.2568$,是两者的算术平均数,由此应可推知《重修大明历》周天度即以 365.2568 为参照值,当然,《乙未元历》更应如此。

表 3-29 所列出的纪元类与知微类各历 1180 年冬至点宿度,知其误差约可达 0.28 度,其中《纪元历》与《知微历》所推可谓密合。

表 3-29 纪元类与知微类历法岁差比较(1180)

历名	制定年代	p	p/(年/度)	上元	崇宁赤道冬至点
纪元历	1106	0.0136	73.48	虚 7	斗 1.69
乾道历	1167	0.0136	73.34	4	1.51
淳熙历	1176	0.0136	73.48	8	1.44
会元历	1191	0.0136	73.70	4	1.41
知微历	1180	0.0132	73.74	7	1.69
庚午元历	1220	0.0132	75.82	6	1.51

唐宋金元历法岁差常数,通常将 S 取 2 位小数,只有《乾元历》与《知微历》例外,后者周天分 $S=1\ 910\ 293.0530$,实际上取了 3 位小数。[①] 按 1180 年《知微历》上元积年 $N_{1180}=88\ 639\ 657$,回归年 $t=1\ 910\ 224/5230$,令 $p_0=0.0132$,按当年冬至点在斗 1.6,取 $\beta_0=47$。则根据式(3-31)与式(3-32)可得:$m_0=3203$,$|\delta|\leqslant 0.0295(k=2)$。

在 3203 附近调整 m,凡使式(3-30)中 $|\delta|\leqslant 0.0295(k=2)$ 者,为可能的历取岁差值 $p=s-t$。当 $0.0131<p<0.0133$ 时,只有两解

$m=3215, S-T=69.29, p=0.013\ 249$,冬至点在斗 1.91

$m=3202, S-T=69.01, p=0.013\ 195$,冬至点在斗 1.92

这两个解均与表 3-29 所述结果相差甚远,皆不可用,因此,

①金史历志(卷 22). 历代天文律历等志汇编(9). 3208 ~3214。

《知微历》未取此数。这便是《知微历》将 S 取 3 位小数重新选择岁差常数的原因。

《知微历》以 $p_0=0.0132$ 为参照值调取岁差常数是不难证明的。因为当 $k=3$ 时，在 3203 附近调取 m，俾使式(3-30)中 $|\delta|\leqslant 0.295$，凡由此所获之岁差值 p 皆保证上元起于虚宿。其可供选择的机会较之 $k=2$ 时增加 10 倍，历取值基本上可与参照值吻合无差。

由表 3-22 可知，《大衍历》之后，回归年与周天度基本上各自在相当长的时期内保持不变。其精度演进多是伴随某次大规模观测而呈阶跃式递变。不难想像，杨级历的制定时代，正处在明天类向纪元类的过渡时期，将两者周天度之差半而取之，作为它的参照常数，以此来调取其历用岁差值 p，是极有可能的。赵知微《知微历》时，袭承这一参照值，并将其传至元代耶律楚材的《庚午元历》。这应当是知微类岁差常数的历史脉络。

5. 统天类岁差常数

由于《统天历》推日度术设立差分，因此，杨忠辅选择其岁差值 $p=0.0150$ 度/年未经过附会上元的调整，可以理解为是杨氏测算出来的结果。郭守敬《授时历》与之相类。就本节讨论的算法而言，我们不打算探究这一数据的来源。

统天类包括的历法有《开禧历》(1207)与《成天历》(1271)，及岁差常数失传的《淳祐历》(1250)与《会天历》(1253)。由表 3-22 知，《开禧历》与《成天历》岁差 $p=0.0148$，同《统天历》存在些微的误差。这一误差是为抵消《统天历》岁实消长法而有意设置的(因为《统天历》回归年愈古愈大，岁差 p 则相应愈古愈小)，还是据式(3-30)选择历取值而不得已算出的结果呢？我们试对《开禧历》做些分析。

1250 年，《开禧历》[①] 距上元积年 $N_{1250}=7\ 848\ 227$，回归年

---

①宋史律历志(卷 84). 历代天文律历等志汇编(8). 2971 ~ 2975。

$t=6\ 172\ 608/16\ 900$,假令 $p=0.0150$,取 $\beta_0=48$。则根据式(3-31)与式(3-32)可得:$m_0=322$,$|\delta|\leqslant 1.0767(k=2)$。在 $m_0=322$ 附近调取 m,使式(3-30)中 $|\delta|\leqslant 1.0767$ 者为可能的历取岁差值 p。大体上每给定一个 m,可以有 2 个合适的 $S-T$。

当 $m=322$ 时,取 $S-T=253.37$,则 $p=0.014\ 992$,此时导得 $\beta=49.9357$,令上元起虚 7,则 1250 年冬至点在斗 0.56。同表 3-30 比较可知,此数与《统天历》最为接近,但非《开禧历》所取。由此可见,《开禧历》可以选择 $p=0.0150$ 的岁差常数为历取值,但它并未这样做。这说明它以 $p_0=0.0148$ 为参照值是历史事实,并非迫于算法的无奈。

由表 3-30 可知,统天类历法的冬至点宿度已经非常接近。这应在恢复此类历法失传岁差常数时给予关注。

表 3-30 统天类历法岁差比较(崇宁赤道,1250)

历名	制定年代	p	p/(年/度)	β	上元	冬至点
统天历	1199	0.015 000	66.67	49.8792	虚 7	斗 0.62
开禧历	1207	0.014 852	67.33	49.7890	7	0.71
成天历	1271	0.014 773	67.69	50.8235	8	0.68
庚午元历	1220	0.013 189	75.82	48.9104	6	0.59

四、中国古历失传岁差常数复原

修复历法失传的岁差常数,应当遵守如下诸项原则:首先,按惯例使上元命起虚宿,并将周天分 S 取两位小数;其次,修补的周天度 s 与岁差 p 应尽可能与前述所属类别的参照值吻合;再次,在相似条件下以上元起于虚 4 或虚 7 者优先考虑;最后,不同时期,对冬至点宿度的推算有不同的精度标准。

1. 大衍类

此类历法中《应天历》(962)常数需要推导;《至道历》(995)、《王睿历》(995)与《乾兴历》(1022)则需要恢复失传的岁差数据。

(1)《应天历》的岁差常数。中国古代历法中依岁差求冬至日度术几乎均按式(3-27)或式(3-28)计算,《应天历》则是一个例外,其算法称:

> 求赤道日度:以天总($S/5$)除元积($TN_n/5$),为总数;不尽,半而进位,又以一百收总数从之,以元法收为度,不满为分秒,命起赤道虚宿四度分。①

设 N_n 为上元积年,$t=T/A$ 为回归年,$s=S/A$ 为周天度,元法 $A=10002$,Z 为总数,则根据上述文字有

$$TN_n/5 = ZS/5 + r, 0 \leqslant r < S/5 \qquad (3\text{-}35)$$

其中,r 为不尽余分,令

$$\alpha = (5r + Z/100)/A$$

则从虚四度起算,α 度之外即为所求冬至点所在。总数 Z 表示什么意思呢? 实际上,天总 $S/5$ 并非真正的周天分之五分之一,假令 $s_1 = S_1/A$ 表示《应天历》真周天度,$p_1 = s_1 - t$,$p = s - t$,则 $p_1 - p = s_1 - s$,又按式(3-27),应有

$$TN_n = \alpha A + ZS_1$$

与式(3-35)相比较,可得

$$Z(S - S_1) = \alpha A - 5r = Z/100$$

于是,$p_1 = p - 0.01/A$,查《应天历》,知

$$pA = S - T = 5 \times (730\,658.64 - 730\,635) = 118.20$$

故有《应天历》所取真岁差值

$$p_1 = 118.19/A = 0.0118 \text{ 度 / 年}$$

(2)《至道历》岁差常数考。1023 年距《至道历》(参见本章第二

---

①宋史律历志(卷68). 历代天文律历等志汇编(8). 2464。

节)上元积年 $N_{1023}=16\ 515\ 120$,回归年 $t=3\ 867\ 941/10\ 590$,令 $p_0=0.0118$,取 $\beta_0=43$。则根据式(3-31)与式(3-32)可得:$m_0=533$,$|\delta|\leqslant 0.32(k=2)$。在 $m_0=533$ 附近调整 m,以使式(3-30)中 $|\delta|\leqslant 0.32$ 者为可能的岁差 p,所有在表 3-31 范围内的解悉如表 3-32 所示。

表 3-31　大衍类历法岁差比较(开元赤道,1023)

历名	制定年代	p	$s=365$	β	上元	冬至点
应天历	962	0.0118	256 267	42.6205	虚 4	斗 7.38
乾元历	981	0.0115	256 379	42.3402	4	7.66
仪天历	1001	0.0118	256 336	40.5612	2	7.44
崇天历	1024	0.0118	256 373	45.7856	7	7.21

表 3-32　《至道历》的岁差选择(开元赤道,1023)

m	$S-T$	p	$s=365.$	β	上元	冬至点
523	122.52	0.011 569	256 234	41.1031	虚 3	斗 7.90
525	**122.99**	**0.011 614**	**256 279**	**43.5330**	**5**	**7.47**
527	123.46	0.011 658	256 323	45.9627	7	7.04
528	123.69	0.011 680	256 345	39.3802	1	7.62
530	124.16	0.011 724	256 389	41.8097	3	7.19
532	124.63	0.011 769	256 433	44.2389	6	7.76
534	125.10	0.011 813	256 478	46.6680	8	7.33
535	125.33	0.011 835	256 500	40.0853	2	7.92

由于《至道历》介于《乾元历》与《仪天历》之间,因此它所推结果应与表 3-31 中前三历接近。首先,其周天度 $s\leqslant 365.2564$,于是有 $m\leqslant 530$;其次,就冬至点而言,应在斗 7.50 附近,因而只有 $m=525$ 与 $m=528$ 时合适;最后,按惯例上元应命起虚中,《大衍历》以后无一以虚 1 为上元冬至日度,所以要尽量避免以此为起点,这样看来 $m=525$ 似乎更好些。

不过我们可以暂缓对此做出结论,因为 995 年王睿同时进呈了两部历法,在探明了《王睿历》岁差常数之后,或许有助于对《至道历》岁差值的判断。

(3)《王睿历》岁差常数。1023 年距《王睿历》(参见本章第二节)上元积年 $N_{1023}=3\ 981\ 180$,回归年 $t=620\ 916/1700$;令 $p_0=0.0118$,取 $\beta_0=43$。则根据式(3-31)与式(3-32)可得:$m_0=128$, $|\delta|\leq 0.21$ ($k=2$)。在 $m_0=128$ 附近调整 m,凡使式(3-30)中 $|\delta|\leq 0.21$ 者,为可能的岁差值 p,表 3-33 给出了所有可能的结果。

表 3-33　《王睿历》的岁差选择(开元赤道,1023)

m	$S-T$	p	$s=365.$	β	上元	冬至点
126	**19.67**	**0.011 571**	**256 277**	**42.3035**	**虚 4**	**斗 7.70**
129	20.14	0.011 847	256 553	47.1782	9	7.82

比较表 3-33 与表 3-31,可知《王睿历》岁差值应取 $p=19.67/1700=0.0116$ 度/年。理由有三:上元起虚 4,是为最常见之起点;冬至点接近表 3-31 诸数;周天度 s 在《应天历》与《乾元历》之间。

《王睿历》岁差值 p 较小的原因,同《乾元历》一样,亦因其回归年 $t=365.2447$,数据偏大所致,它应是岁差常数选择余地小与迁就周天度 $s\leq 365.2564$ 两者共同导致的结果。

回过头来再看《至道历》岁差选择,将《王睿历》岁差 $p=0.011\ 571$—栏各项数据(表 3-33),同表 3-32 中《至道历》的情形相比较,可以发现,最相近的结果即为 $m=525$ 时 $p=122.99/10\ 590=0.0116$度/年,两者的周天度 s 几乎完全吻合。

前文已述,大衍类历法回归年以 365.2446 为参照值,因为 $365.2446\times 1700=620\ 915.8$,所以《王睿历》取回归年 $=620\ 916/1700=365.2447$;又 $365.2447\times 10\ 590=3\ 867\ 941.4$,所以《至道历》回归年 $=3\ 867\ 941/10\ 590$,这种迁就出于同一作者并不奇怪。因此,在岁差常数选择时亦不例外,仍然彼此配合。

(4)《乾兴历》岁差常数考。1023 年距乾兴上元积年 $N_{1023}=30\ 906\ 660$,回归年 $t=2\ 924\ 878/8008$,令 $p_0=0.0118$,取 $\beta_0=43$。则根据式(3-31)与式(3-32)可得:$m_0=998$, $|\delta|\leq 0.13$ ($k=2$)。在 $m_0=998$ 附近调整 m,凡使式(3-30)中 $|\delta|\leq 0.13$ 者即为可选

择的岁差值 p。表 3-34 给出了《乾兴历》历取岁差值所有可能的结果。

表 3-34　《乾兴历》的岁差选择(开元赤道,1023)

m	$S-T$	p	$s=365.$	β	上元	冬至点
1013	95.88	0.011 973	256 479	41.4612	虚 3	斗 7.54
1002	94.84	0.011 843	256 349	45.5602	7	7.44
1000	**94.65**	**0.011 819**	**256 325**	**42.7971**	**4**	**7.20**
998	94.46	0.011 796	256 301	40.0335	2	7.97

比较表 3-26《崇天历》岁差常数的选择,可知《乾兴历》应取岁差 $p=94.65/8008$。理由是,就 $m=1002$ 与 1000 而言,两者 p 与 s 难分伯仲,但后者上元起虚 4,则是大衍类历法普遍选择之数;又《乾兴历》与《崇天历》几乎同时制定,由表 3-26 知,《崇天历》若取岁差 $p=124.98/10\ 590=0.0118$ 时,可推 1024 年冬至在斗7.45,但它实际选择的岁差推得冬至在斗 7.24,从表 3-31 亦可看出,《乾兴历》若取 $p=94.65/8008$,则所推冬至几乎与《崇天历》完全吻合。

2. 明天类

此类历法在崇宁赤道宿度测定之前制造,需要修复岁差常数者有卫朴的《奉元历》(1074)与姚舜辅的《占天历》(1103)。

(1)《奉元历》岁差常数考。1100 年《奉元历》上元积年 $N_{1100}=83\ 185\ 097$,回归年 $t=8\ 656\ 273/23\ 700$。[17] 令 $p_0=0.0128$,取 $\beta_0=45$,则根据式(3-31)与式(3-32)可得:$m_0=2915$, $|\delta|\leqslant 0.14(k=2)$。在 $m_0=2915$ 附近调取 m,凡使式(3-30)中 $|\delta|\leqslant 0.14$ 者即为可选择的岁差常数 p,所有可能的结果如表 3-35 所示。

《奉元历》介于《明天历》与《观天历》之间,比较表 3-27 与表 3-28 之《观天历》数据,可知 $m=2920$ 时所推岁差与之最为密近。另外 $m=2925$ 时,上元命起虚 4,亦不失为一好的选择。总之,《奉

元历》岁差应不出上述两种情形，且尤以后者可能性为大。无妨以 $p=304.40/23\ 700$ 为其历取岁差，合 77.86 年/度。

表 3-35　《奉元历》的岁差选择（开元赤道，1100）

m	$S-T$	p	$s=365.$	β	上元	冬至点
2920	303.88	0.012 822	256 412	45.6872	虚 5	斗 5.31
2925	**304.40**	**0.012 844**	**256 434**	**44.4992**	**4**	**5.50**
2930	304.92	0.012 866	256 456	43.3110	3	5.69
2935	305.44	0.012 888	256 477	42.1226	2	5.88

（2）《占天历》岁差常数考。1100 年《占天历》距上元积年 $N_{1100}=25\ 501\ 757$，回归年 $t=10\ 256\ 040/28\ 080$。[18] 令 $p_0=0.0128$，取 $\beta_0=45$，则根据式（3-31）与式（3-32）可得：$m_0=893$，$|\delta|\leqslant 0.55\ (k=2)$。在 $m_0=893$ 附近调取 m，凡使式（3-30）中 $|\delta|\leqslant 0.55$ 者即为可选择之岁差常数 p，所有使周天度 $365.2564\leqslant s<365.2565$ 者皆如表 3-36。

表 3-36　《占天历》的岁差选择（开元赤道，1100）

m	$S-T$	p	$s=365.$	β	上元	冬至点
895	360.00	0.012 821	256 410	41.1154	虚 1	斗 5.88
896	360.41	0.012 835	256 425	48.2006	8	5.80
897	360.81	0.012 849	256 439	46.2043	6	5.80
898	**361.21**	**0.012 864**	**256 453**	**44.2079**	**4**	**5.79**
899	361.61	0.012 878	256 468	42.2116	2	5.79
900	362.02	0.012 892	256 482	49.2967	9	5.70
901	362.42	0.012 906	256 496	47.3002	7	5.70

明天类历法周天度逼近 365.2564，若照此推理则当取 $m=895$，不过此时上元命起虚 1，这在唐宋元历法中却是孤例，因此，恐非《占天历》的选择。《占天历》岁差常数若注重上元起点，则应为 $p=361.21/28\ 080$；若考虑周天度，则应取 $p=360.41/28\ 080$。

3. 知微类

此类历法取岁差参照值 $p_0 = 0.0132$，周天度参照值 $s = 365.2568$。需要修补的历法有两部。

(1)《重修大明历》岁差常数考。1180 年距《重修大明历》上元积年 $N_{1180} = 383\ 768\ 557$，回归年 $t = 1\ 910\ 224/5230$。① 按 $p_0 = 0.0132$，取 $\beta_0 = 46$，则根据式(3-31)与式(3-32)可得：$m_0 = 13\ 869$，因为此历日法 A 较小，且 N_{1180} 很大，故按照《知微历》标准，将周天分 S 取 3 位小数，于是 $|\delta| \leqslant 0.068(k=3)$。将 m 在 13 869 附近调取，凡使 $|\delta| \leqslant 0.068$ 者即为可选择的岁差常数 p，所有满足 $365.256\ 75 < s < 365.256\ 85$ 的结果，均列在表 3-37 中。

表 3-37　杨级《重修大明历》岁差选择（崇宁赤道，1180）

m	$S-T$	p	$s=365.$	β	上元	冬至点
13 851	68.947	0.013 183	256 778	42.6560	虚 1	斗 1.84
13 852	68.952	0.013 184	256 779	44.2774	2	1.22
13 853	**68.957**	**0.013 185**	**256 780**	**45.8989**	**4**	**1.60**
13 854	68.962	0.013 186	256 780	47.5203	6	1.98
13 855	68.967	0.013 187	256 781	49.1417	7	1.36
13 856	68.972	0.013 188	256 782	50.7631	9	1.74
13 897	69.176	0.013 227	256 821	43.8685	2	1.63
13 898	69.181	0.013 228	256 822	45.4899	4	2.01
13 899	69.186	0.013 229	256 823	47.1114	5	1.39
13 900	69.191	0.013 230	256 824	48.7328	7	1.77
13 901	69.196	0.013 231	256 825	50.3543	8	1.15

由于宋代《明天历》(1064)之后，各历上元冬至点起度皆在虚 4 与

①元史历志(卷 53)．历代天文律历等志汇编(9)．3364。

虚 8 之间,且尤以虚 4 和虚 7 居多,因此,在有多种可能的选择时,首先考虑虚 4 ~ 虚 8 为上元起点的情形。比较表 3-29《纪元历》与《知微历》、《庚午元历》等历法所推至 1180 年冬至点宿度,可以发现 $m=13\ 853$与 $m=13\ 900$ 是两种最可能的选择。由于前者 $p=68.957/5230$ 更与《知微历》及《庚午元历》接近,且所推冬至点完全在表 3-29 所列南宋及金元诸历之间,因此更具可能性。由表 3-37 还可以看出,若令杨级《重修大明历》周天度 $s=365.2568\pm0.000\ 05$,则当周天分 S 取两位小数时将没有选择对象。

综合上述分析,我们认为杨级《大明历》岁差常数应是 $p=68.957/5230$,合 75.84 年/度。

(2)《乙未元历》岁差常数考。1180 年距耶律履《乙未元历》上元积年 $N_{1180}=40\ 453\ 026$,回归年 $t=7\ 556\ 890/20\ 690$(参见本章第二节),按 $p_0=0.0132$,取 $\beta_0=46$,则根据式(3-31)与式(3-32)可得:$m_0=1462$,$|\delta|\leqslant0.25(k=2)$。将 m 在 $m_0=1462$ 附近调整,凡使式(3-30)中 $|\delta|\leqslant0.25$ 者即为可选择的岁差常数 p,所有满足 $365.2567<s<365.2569$的结果,皆如表 3-38 所示。

表 3-38　《乙未元历》岁差选择(崇宁赤道,1180)

m	$S-T$	p	$s=365.$	β	上元	冬至点
1473	275.20	0.013 301	256 897	46.8060	虚 5	斗 1.69
1470	274.64	0.013 274	256 870	47.7061	6	1.79
1467	274.08	0.013 247	256 843	48.6061	7	1.89
1464	273.52	0.013 220	256 816	49.5059	8	1.99
1460	272.77	0.013 184	256 780	44.1884	2	1.31
1457	272.21	0.013 156	256 752	45.0878	3	1.41
1454	**271.65**	**0.013 130**	**256 726**	**45.9871**	**4**	**1.51**

就冬至点而言,$m=1473$ 时,斗 1.69 与《知微历》吻合,但其 p 与 s 均相差太大;就接近$s=365.2568$而言,$m=1464$ 与 1460 最好,但前者冬至点相差太多,后者上元起于虚 2 似不甚理想,且其冬至

点相较而言与南宋诸历差别较大。$m=1454$ 时,上元起于虚 4,冬至点在斗 1.51,应是很好的结果,不过其岁差 $p=0.01313$,合 76.16年/度,与知微类历法参照值 75.75 年/度相差稍多。

总而言之,《乙未元历》岁差常数应当在 $m=1460$、1457、1454 三例之中,且以 $p=271.65/20690$,合 76.16 年/度最为可能。

4. 统天类

此类历法取岁差参照值 $p_0=0.0148$度/年,周天度参照值随回归年长度而定。共有两部历法的岁差需要考证。

(1)《淳祐历》岁差常数考。1250 年距李德卿《淳祐历》[①]上元积年 $N_{1250}=120267647$,回归年 $t=1289307/3530$。按 $p_0=0.0148$,取 $\beta_0=48$,则根据式(3-31)与式(3-32)可得:$m_0=4873$,$|\delta|\leqslant 0.014(k=2)$。按式(3-30),将 m 在 $m_0=4873$ 附近调整,凡使式(3-30)中 $|\delta|\leqslant 0.014$ 者,可视为选择对象,于是所有满足 $0.0147<p<0.0149$ 的结果均如表 3-39 所示。

表 3-39　《淳祐历》岁差选择(崇宁赤道,1250)

m	$S-T$	p	$s=365.$	β	上元	冬至点
4868	52.19	0.014 785	257 561	47.5807	虚 5	斗 0.92
4854	**52.04**	**0.014 742**	**257 518**	**50.8696**	**8**	**0.63**

按理,《淳祐历》度法 $A=3530$ 非常小,周天分 S 取 2 位小数时可选择之余地很有限,不过,在仅有的两例选择对象中,却出现了一个极佳的可选择值,即 $p=52.04/3530$,合 67.83 年/度,比较表 3-30 之南宋诸历相应数据,可以肯定,此数必为《淳祐历》岁差常数。

①元史历志(卷 53). 历代天文律历等志汇编(9). 3366。

(2)《会天历》岁差常数考。1250 年距谭玉《会天历》①上元积年N_{1250} = 11 356 127 年,其历取回归年 t = 3 557 466/9740。令 $p_0 = 0.0148$,取 $\beta_0 = 48$,则根据式(3-31)与式(3-32)可得:$m_0 = 460$, $|\delta| \leq 0.42 (k=2)$。按式(3-30),将 m 在 $m_0 = 460$ 附近调整,凡使 $|\delta| \leq 0.42$ 者,可视为选择对象,所有满足 $0.0147 < p < 0.0149$的结果,均如表 3-40 所示。

将表 3-40 同表 3-30 相比较,可以很明显地看出 m = 460 时所取岁差 p = 144.15/9740 无论在上元冬至点起度、岁差 p 的精度、冬至点推算等几方面均与南宋时期各历数据极为接近,无疑是《会天历》岁差常数的最佳选择。

表 3-40　《会天历》岁差选择(崇宁赤道,1250)

m	$S-T$	p	s = 365.	β	上元	冬至点
463	145.09	0.014 896	257 812	49.9966	虚 7	斗 0.50
461	144.46	0.014 832	257 747	45.9635	3	0.54
460	**144.15**	**0.014 800**	**257 716**	**49.8430**	**7**	**0.66**
458	143.52	0.014 735	257 651	45.8097	3	0.69
457	143.21	0.014 703	257 619	49.6887	7	0.81

5. 小结

按照本节第一部分所述中国古代历法选择岁差常数的算法,参照第三部分有关唐宋金元历法岁差常数的分类,我们计算并讨论了《至道》等九部失传历法岁差值的所有可能的情形,其中大衍类与统天类的五部历法岁差数据大体上可以肯定,它们分别是:《至道历》、《王睿历》、《乾兴历》、《淳祐历》、《会天历》。

明天类中的《奉元历》有两种可能的选择(表 3-35):p = 303.88/23 700与 p = 304.40/23 700,按照优先考虑上元命起虚 4

①元史历志(卷 53).历代天文律历等志汇编(9). 3366。

的原则,我们假定它取后者为历法岁差常数,此数本身亦与《观天历》十分接近。它所推冬至点宿度适介于《明天历》与《观天历》之间。这些均较前者为佳。

明天类中的《占天历》是一部比较特殊的历法,原因是它出自《纪元历》作者姚舜辅之手,而制定之时崇宁赤道的观测修正才刚刚开始,因此我们姑且将其归入明天类。按表3-36所示选择范围,《占天历》亦有多种可能的取值,就冬至点的推算而言,它们皆与《明天历》接近;就岁差常数精度而论亦均在《明天历》与《统元历》之间。在此情形下亦遵循虚4优先的原则,取 $p=361.21/28\ 080$ 为《占天历》岁差常数。

知微类中的《重修大明历》应取 $p=68.957/5230$,这个结果是通过与《知微历》及《庚午元历》的比较从表3-37中筛选出来的。

知微类中的《乙未元历》虽有多种选择,但与《知微历》及《庚午元历》相较,均不甚理想。综合权衡,似以 $p=271.65/20\ 690$ 可能性为大,理由有三:其一,上元起虚4,合乎常例;其二,冬至点介于纪元类与知微类诸历之间(表3-29),且与《乾道历》及《庚午元历》密合;其三,岁差 $p=0.013\ 130$ 虽然偏小,但与《知微历》p 之差 $=0.000\ 073$,与统天类之《开禧历》同《成天历》p 之差 $=0.000\ 081$ 相当,应在可允许范围。因此,《乙未元历》以 $p=271.65/20\ 690$ 为历取岁差值之可能性较大。

五、中国古代岁差常数的特点

1. 岁差常数的测算

中国古代历来注重对冬至点的测定,虞喜发现并阐述岁差现象即是通过考证冬至日太阳宿度的改变而做出的。[19]有关古人测定冬至点的方法何妙福、李鉴澄与陈美东已有很精辟的总结,[20,21]主要包括昏旦夜半中星法、月食冲法、行星借日出没法及

月离宿次法等几种。[1] 那么，历算家通常测定岁差常数的步骤是什么呢？据明代礼部尚书范谦所称：

> 岁差之法，自虞喜以来，代有差法之议，竟无画一之规。所以求之者，大约有三：考《月令》之中星，测二至之日景，验交食之分秒。考以衡管，测以臬表，验以漏刻，斯亦未俺得之矣。[2]

用衡管窥昏旦或夜半中星，然后以岁差追考先秦《月令》之中星天象，定岁差常数；用臬表测二至影长，推求冬至时刻；用漏刻计算交食之分秒，以测算日躔宿次。

以上三条大概是中国古代历法家治历时选取岁差常数通常采取的步骤。其中后两条主要是测定治历时冬至点所在。而第一条则是通过对《月令》中星的考验，来判断历取岁差值的精度。

事实上，完全按照上述步骤来选取其岁差常数的历法并不如想像得多。通过前文的讨论不难看出，在《授时历》之前800多年的历史中，只有《大衍历》、《明天历》、《纪元历》、《重修大明历》与《统天历》等不多的几部历法在岁差常数的选择上有所创新，其余数十部历法基本上皆因循前历之作，总的说来"以算为主，以测为辅"。赤道宿度、冬至时刻与回归年长度能够在相当长的时期保持不变，就是多数历家治历时"未尝测景"的明证。[3]

按岁差推合《月令》甚至《尧典》中星，可以有较大的吻合区间，原因是这些中星本身未指明宿度，另外，它们是否恰好24气日的记录亦有异议，因此，要推合它们还是不难的。换句话说，《月令》与《尧典》的记录若直接用于选取岁差常数，则精度显然不够。另外，汉代以来的冬至点测定记录，由于年代距离不远、漏刻计时

---

①元史历志(卷53). 历代天文律历等志汇编(9). 3364

②明史历志(卷31). 中华书局编. 历代天文律历等志汇编(10). 北京：中华书局，1976，3536～3537。

③宋史律历志(卷82). 历代天文律历等志汇编(8). 2890。

与赤道宿度的误差等方面的原因，也为历家测算其岁差常数提供了一定的选择余地。

概而言之，中国古代历法中之岁差常数主要是通过附会既定上元而计算出来的，这一点应无疑问。这种算法对唐代以前诸历岁差值精度影响颇大，但因《月令》中星及汉代以来冬至点宿度的记录未臻精密，所以，附会上元所产生的岁差值误差未引起治历者足够的重视。《大衍历》之后，历家普遍将周天分 S 取两位小数，致使附会上元时的调整误差大为减少，治历者通常以前任历法岁差值为参照来调取历法岁差常数，只是在历经相当长的时期后，误差逐渐明显，才通过某次大规模的测定而给予校正。因此唐宋元时期历法岁差值精度的演进，基本上是阶梯式递变的。

2. 历元与赤道宿度

自祖冲之将岁差引入历法计算，历算家即命上元冬至日度在虚宿，只有《神龙历》例外，至《授时历》亦未改变。据祖冲之称：

> 以子为辰首，位在正北，爻应初九，斗气之端，虚为北方，列宿之中，元气肇初，宜在此次，前儒虞喜，备论其义。①

这是笔者找到的唯一一条论述上元命起虚宿之理由的文字，按祖冲之的说法，似乎这个规矩是虞喜定下的。另外，通过计算不难发现，几乎所有历法按岁差推求，其唐尧时代（约公元前2350）冬至点皆在虚宿之内，由于《尧典》天象是中国古天文家论证岁差之存在的最原始资料，因此，历算家在推合《尧典》天象时，以虚宿为近距岁差历元，应当可以理解，一行《大衍历议》称：②

> 自帝尧演纪之端，在虚一度，及今开元甲子，却三十六度，而乾策复初矣。日在虚一，则鸟、火、昴、虚皆以仲

①宋书律历志（卷13）．历代天文律历等志汇编（6）．1744。

②新唐书历志（卷27上）．历代天文律历等志汇编（7）．2182。

月昏中，合于《尧典》。

说明唐宋元历法演纪上元算法系统，的确以尧时冬至点在虚宿为岁差近距历元。

中国古历推冬至日度术通常注明从“虚 q”起算，有些历法后面写有“算外”，有些则无。由于

$$虚\ q\ 算尽 = 虚\ q + 1\ 算外$$

因此，在推冬至日度时若忽略这个差别，冬至点有可能差一度。

另外，中国古代以太阳平行一日的周天距离为一度，因此，周天度约为 365.2564 度，此小余部分在历家的赤道宿度中出现的位置常有些差别，如《大明历》“入虚去分”，将此小余系于女虚之间；《大业历》“经斗去分”，将小余系于斗末；《大衍历》之后，基本上皆将其置于虚末，术曰“经虚去分”。这一点如不注意，则冬至点推算亦可能造成 1/4 度的误差。

关于赤道宿度的更替，表 3-28 已有所说明，此不重复。

3. 中国古历岁差常数沿革

从祖冲之《大明历》至郭守敬《授时历》800 余年间，现存 50 部基本常数尚全的历法，其中《正光历》(522)、《兴和历》(540)、《九宫历》(547)、《天保历》(550)、《天和历》(566)、《甲寅元历》(576)、《孟宾历》(576)、《大象历》(579)、《开皇历》(584)、《麟德历》(664)等 10 部未采用岁差计算。判别此类历法的方法非常简单，它们的回归年与周天度相同，因此，皆将岁余称为“斗分”。

《大衍历》(724)之前，岁差常数的选择算法与标准颇不一致，加之历取岁差分 $S-T$ 多为整数，因此，附会上元的调整过程中常与参照值产生较大误差，大体上岁差参照值 p_0 在 0.01～0.02 度/年之间。

《大衍历》之后，岁差常数的选择趋于统一，岁差分 $S-T$ 基本上取两位小数，调整误差大为减少，历取岁差值 p 相对分阶段接近。

《崇天历》(1024)之前，按照回归年 t 以 365.2445 为参照值，

周天度 s 以 365.2564 为参照值,应取岁差值 p_0 = 0.0119 度/年;而实际上,由于各历多取 $t > 365.2445$, $s < 365.2564$,故而其历取岁差参照值多为 p_0 = 0.0118 度/年。个别历法,如《乾元历》、《至道历》等历,因回归年太大,而导致历取岁差常数 p 偏小。这个阶段的总体趋势是, p_0 = 0.0118 度/年。

《明天历》(1064)之后,回归年长度调整为 365.2436,周天度参照值仍为 365.2564,因此岁差参照值取 p_0 = 0.0128 度/年。

《纪元历》(1106)之后,周天度调整为 365.2572,回归年参照值仍为 365.2436,因此岁差参照值取 p_0 = 0.0136 度/年。

这个期间金代历法综合前两类历法周天度的算术平均,定 365.2568 为周天度参照值,回归年不变,于是 p_0 = 0.0132 度/年。

南宋《统天历》(1199)之后,回归年与周天度皆有改变。《统天历》采用岁实消长法,回归年古大今小,按周天度不变,则岁差参照值 p_0 = 0.0150 度/年,古小今大。《统天历》之后的南宋历法未步杨忠辅后尘采用岁实消长法,因此其岁差常数古今一致,为推合往古,故稍减《统天历》岁差,定岁差参照值取 p_0 = 0.0148 度/年。《授时历》(1280)基本恢复《统天历》岁差算法。

由此可见,中国古代历法岁差常数的历史沿革,大约经历了这样几个阶段(表 3-23):

(1) 祖冲之《大明历》(463):历法引入岁差计算;

(2) 一行《大衍历》(724):统一岁差分 $S-T$ 取值标准,测定开元赤道宿度;

(3) 周琮《明天历》(1064):调整《大衍历》回归年长度,测定皇祐赤道宿度;

(4) 姚舜辅《纪元历》(1106):调整《大衍历》周天度长度,测定崇宁赤道宿度;

(5) 杨级《重修大明历》(1127):取《大衍历》与《纪元历》周天度平均值,回归年与《明天历》相同;

(6) 杨忠辅《统天历》(1199):制定岁实消长法,调整《纪元

历》回归年与周天度长度；

（7）郭守敬《授时历》(1280)：测定至元赤道宿度。

表 3-41　中国古代历法岁差常数

历名	年代	岁差分 $S-T$	度法 A	岁差 p /(年/度)	上元冬至点	治历时冬至点	坐标	出处
大明历	463	860	39 491	45.92	虚 1	斗 11.97	太初	1747
大同历	544	213	39 616	185.99	2	12.20	太初	
武平历	576	509/3	8047	47.53	9	13.20	太初	占经
					7	11.20		
皇极历	604	609.5	46 644	76.53	1	10.19	黄道	1951
大业历	608	503	42 640	84.77	5	11. 86	太初	1915
					7	13.86		
戊寅元	618	170.5	9464	55.51	6	13.65	太初	2127
乙巳元	629	13	1340	103.08	4.25	11.96	太初	乙巳占
神龙历	705	123.71	10 000	80.83	牛初	11.81	黄道	占经
大衍历	724	36.75	3040	82.72	虚 9	10.47	开元	2226
五纪历	762	14.70	1340	91.16	4	10.34	开元	2275
正元历	784	12.02	1095	91.10	4	10.36	开元	2296
宣明历	822	296.99/3	8400	84.85	9	9.63	开元	2319
崇玄历	892	160.24	13 500	84.25	3	8.87	开元	2351
钦天历	956	84.40	7200	85.31	7	8.35	开元	2412
应天历	962	118.19	10 002	84.63	4	8.10	开元	
乾元历	981	33.755 35	2940	87.10	4	8.14	开元	2464
至道历	995	122.99	10 590	86.10	5	7.79	开元	
王睿历	995	19.67	1700	86.43	4	8.02	开元	
仪天历	1001	118.99	10 100	84.88	2	7.70	开元	2464
乾兴历	1022	94.65	8008	84.61	4	7.20	开元	
崇天历	1024	125.02	10 590	84.71	7	7.23	开元	2581
	1024	126.17	10 590	83.93	8	7.07	开元	2626
明天历	1064	80 447/160	39 000	77.57	5	6.29	开元	2652
奉天历	1074	304.40	23 700	77.86	4	5.84	开元	
观天历	1092	154.57	12 030	77.83	4	5.45	开元	2751
占天历	1103	361.21	28 080	77.74	4	5.75	开元	
纪元历	1106	7937/80	7290	73.48	7	2.69	崇宁	2804

续表

历名	年代	岁差分 $S-T$	度法 A	岁差 p /(年/度)	上元冬至点	治历时冬至点	坐标	出处
杨级历	1127	68.957	5230	75.84	4	2.30	崇宁	
统元历	1135	88.87	6930	77.98	4	2.87	崇宁	2916
乾道历	1167	409.05	30 000	73.34	4	1.69	崇宁	2916
淳熙历	1176	230.26/3	5640	73.48	8	1.49	崇宁	2916
乙未元	1180	271.65	20 690	76.16	4	1.51	崇宁	
知微历	1180	69.053	5230	75.74	7	1.69	崇宁	3221
会元历	1191	525.13	38 700	73.70	4	1.26	崇宁	2916
统天历	1199	180	12 000	66.67	7	1.39	崇宁	2984
开禧历	1207	251.01	16 900	67.33	7	1.35	崇宁	2983
庚午元	1220	68.98	5230	75.82	6	0.99	崇宁	3459
淳祐历	1250	52.04	3530	67.83	8	0.63	崇宁	
会天历	1253	144.15	9740	67.57	7	0.66	崇宁	
成天历	1271	109.61	7420	67.70	8	0.37	崇宁	2983
授时历	1280	150	10 000	66.67	6	箕10.0	至元	3380

注:上元起度皆以算外计之。出处栏中数字为《历代天文律历等志汇编》一书的页码,"占经"指《开元占经》。凡未注明出处者,请参见本节第四部分的讨论。

参　考　文　献

[1] 曲安京.中国古代历法中的上元积年计算.见:数学史研究文集(1).呼和浩特:内蒙古大学出版社;台北:九章出版社,1990.24~37

[2] 陈美东.论我国古代年、月长度的测定(上).见:科技史文集(10).上海:上海科技出版社,1983.9

[3] [唐]瞿昙悉达.开元占经.北京:中国书店影印,1989.756

[4] 严敦杰.北齐董峻郑元伟《甲寅元历》积年考.东方杂志,1946,42(18):29~30

[5] 严敦杰.北齐张孟宾历积年考.东方杂志,1946,42(16):23~24

[6] 严敦杰.补《北齐书历志》.自然科学史研究,1984,3(3):236~244

[7] 曲安京.再论隋代前后的太阳运动理论.大自然探索,1994,13(3):104~111

[8] [清]汪曰桢.古今推步诸术考.见:历代长术辑要.第二版.台北:台

湾中华书局,1971

[9] 朱文鑫. 历法通志. 上海:商务印书馆,1934. 39

[10] 曲安京. 王睿、至道、乾兴、乙未四历历元通考. 自然科学史研究,1994,13(3):234~235

[11] 鲁实先. 宋《乾兴历》积年日法朔余考. 东方杂志,1944,40(24):37~39

[12] 严敦杰. 宋《乾兴历》积年日法朔余考申考. 东方杂志,1945,41(7):43~44

[13] 整研组. 中国天文学史. 北京:科学出版社,1981

[14] 陈遵妫. 中国天文学史(3). 上海:上海人民出版社,1984

[15] 鲁实先. 金《乙未元历》命算日及岁实朔实考. 东方杂志,1945,41(12):44~48

[16] 李淳风. 乙巳占. 见:丛书集成初编(0711~0713). 北京:中华书局,1985

[17] [清]李锐. 修补奉元术. 见:李氏算学遗书. 上海:醉六堂版,1890(光绪十六年)

[18] [清]李锐. 修补占天术. 见:李氏算学遗书. 上海:醉六堂版,1890(光绪十六年)

[19] 何妙福. 岁差在中国的发现及其分析. 见:科技史文集(1). 上海:上海科学技术出版社,1978

[20] 李鉴澄. 岁差在我国的发现、测定和历代冬至日所在的考证. 见:中国天文学史文集(3). 北京:科学出版社,1984. 124~137

[21] 陈美东. 中国古代冬至太阳所在宿度的测算. 见:中国传统科技文化探胜. 北京:科学出版社,1992. 147~154

第四章　实数的有理逼近

中国古代的数理天文学通常都是以分数的形式选择历法中用到的天文常数。选择非十进分数为历取天文常数的根本原因,乃是在于利用分数固有的特性:充分逼近的精度,能够寓于非常简单的数字之中,同时还常常可以为治历者提供较多选择的机会。后者对于采用上元积年算法系统的历法来说,具有非常重要的意义。[1]由于这些天文常数基本上都是无理数,因此,历法家们设计了一些算法用来挑选合适的有理数去逼近这些常数。这样的方法,在数学上被称作"实数的有理逼近"。

第一节　闰　　周

中国传统历法都是典型的阴阳合历,其历月的平均长度取朔望月,而历年的平均值为回归年。由于一个回归年大约相当于12.37个朔望月,为了在安排历日时协调这两个基本常数之关系,历家便在一个正常历年(12个历月)的基础上,相隔若干年置入一个闰月。于是历法中便出现了闰周。唐代以前的历法,都会设定一个闰周。闰周是指这样一对整数

$$p\text{ 个朔望月} = q\text{ 个回归年}$$

称p为章月,q为章岁;$p-12q$表示q个历年中共置入的闰月数,称为章闰。

由于太阳、月亮及各种行星摄动的影响,朔望月与回归年之间的比数并非一个恒定的常量,因此,精确而又简明的闰周事实上是不存在的。尽管如此,并不能彻底抹煞古代历法家对精密闰周不懈求索的历史意义,作为一种近似算法,闰周的存在不仅促进了当

时的天文观测,也丰富和发展了相应的数学理论。

我们今天讨论闰周的数学性质,乃是为了探索和重构古代历家选择闰周、朔望月与回归年常数的一般模式。由于闰周的存在,使得历法中两个最基本的天文常数朔望月与回归年彼此不能独立,通常其中之一将通过闰周导出其历取数据,因此,闰周的好坏,往往决定了那个导出常数的精度。

本节给出了一种中国古代历法家可能采用的调取闰周的方法,并通过对其精度的定量刻划,揭示出这样的事实:闰周算法,与渐近分数算法有着深刻的联系。这一结果不仅有助于我们通过历取朔望月或回归年数值,了解到治历者当时实际掌握的该常数之精度,而且对于中国古代是否存在类似连分数这样的实数有理逼近算法,提供有益的证据。

一、闰周与基本常数

一般说来,朔望月与回归年长度是"测"出来的,而闰周则是"算"出来的。一个理想的闰周,理论上讲应当是回归年与朔望月实测数据之比值的某个渐近分数,其结果可以利用连分数展开求得。

中国历法中的各项天文周期通常都用分数表示,历取值一般都是在确定了法度(分数之分母)之后调取而得。唐代以前各历皆有闰周,历取朔望月与回归年之分母分别称为日法和纪法。由于所有日法 A 与纪法 B 几乎都分别含有章月 p 与章岁 q 之因子,因而可以断定闰周是先于历取朔望月与回归年常数而定的。

照理说,作为基本常数,朔望月与回归年之历取值应当是其实测值的简单命分,但因闰周既定,两者必取其一为导出常数,所以,我们有关闰周性质之讨论的第一个有意义的问题,就是判断朔望月与回归年究竟谁为导出常数。

这个问题已有陈美东等学者从不同角度进行过有益的探

讨，[2]我们将通过中国历法中朔望月与回归年数据形式上的特征，从算法的矛盾性上给出此问题的三个判定标准与结果。

1. 朔望月为导出常数

如果章岁 q 可分解为两整数之积 $q=\beta\gamma$，且存在整数 α 使纪法 $B=\alpha\beta$，日法 $A=p\alpha$，则基本上可以判定先选取纪法 B，并确定回归年 T/B，然后依下述线路导出历取朔望月常数 U/A

$$B\to\frac{T}{B}\to\frac{T}{B}\times\frac{q}{p}=\frac{T\gamma}{p\alpha}=\frac{U}{A}$$

原因在于：如若不然，假定先取朔望月 U/A，再通过闰周 q/p 导出回归年 T/B，则要求$(q,U)=\gamma$，这一点太过偶然。

考查历史上现存25部有闰周之历法，只有《四分历》与刘智的《太始历》(一名《正历》)属此类情形。有意思的是，这25部采用闰周的历法中有23部称 A 为日法(《皇极历》称 A 为朔日法)，只有《四分历》与《太始历》例外，前者称 B 为日法，A 为蔀月；后者称 B 为度法，A 为纪月。

按日法的本意，是将一个历日划定为若干分数。在岁差引入历法之前，周天的度数与回归年的长度相同，因此，《太始历》之度法与《四分历》之日法 B 同义。它们都是先从历取回归年入手，将一个历日的分数取定，然后通过闰周，把朔望月导出。

对于《四分历》，$qB=19\times4=76$ 年，称为一蔀。一蔀之内恰合 $4\times235=A$ 个朔望月，因称 A 为蔀月。

对于《太始历》，$qB=19\times150$ 年，称为一纪。一纪之内恰合 $150\times235=A$ 个朔望月，所以称 A 为纪月。

两者取义相同，显然均系导出常数。

2. 回归年为导出常数

与前述情形相反，如果章月 $p=\beta\gamma$，且存在整数 α 使纪法 $B=q\alpha$，日法 $A=\alpha\beta$，则大抵可以认为是先确定了日法 A，然后依下述

路径导出回归年

$$A\to\frac{U}{A}\to\frac{U}{A}\times\frac{p}{q}=\frac{U\gamma}{q\alpha}=\frac{T}{B}$$

原因在于：如若不然，则将要求$(T,p)=\gamma$，这一点对于非导出常数的回归年 T/B 将过于巧合。

与前述情形形成鲜明对比，在9部采用古章法19年7闰和16部革新闰周的历法中，分别有7部和9部属于此类历法。其中《乾象历》、《黄初历》、《景初历》、《永和历》、《三纪甲子历》和《元嘉历》均取 $\gamma=5$。而在《大象历》中 $\gamma=3$，《开皇历》$\gamma=7$，《戊寅元历》$\gamma=9$。在这些历法中，由于章月 p 与岁实 T 之公因子 γ 皆较小，不能彻底排除其中有个别历法系经约化成此类情形的可能性，但由于这些历法几占总数的三分之一，不太可能都是约化出来的结果，所以总体上仍不妨将其历取回归年列为导出常数。

而在其余7部此类历法中，章月 p 与岁实 T 之公因子 γ 皆比较庞大，纯系偶合的可能性极小，所以将它们的回归年定为导出常数，殆无疑问。

3. 无法直接判定导出常数

如果前述两种类型中之 $\gamma=1$，且存在整数 α 使日法 $A=p\alpha$，纪法 $B=q\alpha$，则无法从形式上判断究竟历取朔望月与回归年孰先孰后。此类历法共7部，其共同特点是日法 A 皆比较庞大，纪法 B 亦均在数千以上。

按中国历法家对朔望月与回归年历取值的精度标准衡量，此类历法无论先取日法 A 定朔望月还是先取纪法 B 定回归年都能保障历取值的精度，尤其是日法 A 的选择，根本无需启用调日法之类的数学手段。此类历法确定历取回归年或朔望月的路线，将按下列两条之一进行：先选择 α，使

$$A=p\alpha\to\frac{U}{A}\to\frac{U}{A}\times\frac{p}{q}=\frac{U}{q\alpha}=\frac{T}{B}$$

表 4-1 闰周与基本常数之关系

序号	历名	章月 p	章岁 q	A	(A,p)	B	B/q	类
0	古六历	235	19	940	235	4		
1	太初历	235	19	81		1539	81	Ⅱ
2	四分历	235	19	940	235	4		Ⅰ
3	乾象历	235	19	1457	47	589	31	Ⅱ
4	黄初历	235	19	12 079	47	4883	257	Ⅱ
5	景初历	235	19	4559	47	1834	97	Ⅱ
6	永和历	235	19	12 079	47	4883	257	Ⅱ
7	太始历	235	19	35 250	235	150		Ⅰ
8	三纪历	235	19	6063	47	2451	129	Ⅱ
9	元始历	7421	600	89 052	7421	7200	12	Ⅲ
10	元嘉历	235	19	752	47	608	32	Ⅱ
11	大明历	4836	391	3939	39	39 491	101	Ⅱ
12	正光历	6246	505	74 952	6246	6060	12	Ⅲ
13	兴和历	6951	562	208 530	6951	16 860	30	Ⅲ
14	大同历	7656	619	1536	24	39 616	64	Ⅱ
15	九宫历	6246	505	49 968	6246	4040	8	Ⅲ
16	天保历	8361	676	292 635	8361	23 660	35	Ⅲ
17	天和历	4836	391	290 160	4836	23 460	60	Ⅲ
18	甲寅元历	8126	657	276 284	8126	22 338	34	Ⅲ
19	武平历	7656	619	1144	88	8047	13	Ⅱ
20	孟宾历	7656	619	948	12	48 091	79	Ⅱ
21	大象历	5541	448	53 563	1847	12 992	29	Ⅱ
22	开皇历	5306	429	181 920	758	102 960	240	Ⅱ
23	皇极历	8361	676	1242	9	46 644	69	Ⅱ
24	大业历	5071	410	1144	11	42 640	104	Ⅱ
25	戊寅元历	8361	676	13 006	929	9464	14	Ⅱ

注：Ⅰ类指以朔望月为导出常数；Ⅱ类指以回归年为导出常数；Ⅲ类历法的导出常数不能直接判断。

或　　$B = q\alpha \to \frac{T}{B} \to \frac{T}{B} \times \frac{q}{p} = \frac{T}{p\alpha} = \frac{U}{A}$

由此可见，在凡25例有闰周的历法中，除7例无法定夺谁为导出常数之外，仅2例可以肯定属于第Ⅰ类情形，其余16例基本上能够断言以回归年为导出常数，占总数近2/3。

虽然闰周与朔望月原则上彼此独立，但因后者日法 A 与前者章月 p 之间存在非1的公因子，故朔望月 U/A 的调取应在闰周确定之后进行，它与参照值 u 的误差，将因日法 A 选取的适当与否而决定。一个值得注意的现象是，在前述第Ⅱ种类型的16部历法中，多数历法的日法 A 均小，许多日法 A 甚至仅1000左右，如此大小的数，通常不足以胜任高精度之朔望月常数的分母 A，必须经过特别的挑选，所以此类数据多系调日法算得的结果。[3]

由于闰周的存在，历家在选取朔望月与回归年数据时，一般只须考虑其中之一的精度，另一值的误差将依闰周的好坏而加以控制。与历取朔望月常数不同，作为导出常数的回归年不是通过其参照值 t 的直接命分获得的结果，它的精度取决于闰周与朔望月的优劣。因此，不能像 U/A 那样通过选择适当的法度而任意接近其参照值 u，其间必定有些微的误差，那么这个误差究竟有多大？是否严重影响历取回归年之精度？能否据历取值导出其参照值之范围？这些将是下文着重讨论并试图予以回答的问题。

二、闰周的数学性质

中国历法在唐代李淳风《麟德历》(665)以前，都采用闰周制。早期历法基本上都取古章法19年7闰制，从公元5世纪开始，各历陆续革新闰周，先后出现了10种不同的新章法。人们发现，这些新的闰周全部满足如下的公式

$$\frac{p}{q} = \frac{235m + 136}{19m + 11} \tag{4-1}$$

通常人们认为，中国历法家是按调日法的思想利用式(4-1)选择其历取闰周的。因为11年4闰的周期置闰偏小，所以历家基本上是增损19年7闰的权数 m 来选择新历应取的闰周。这样的选择理当有一定的参照，情况不外乎两种：其一，以旧历闰周多年行用所产生的累积误差，经估算而调整式(4-1)中的权数 m，多则损之，少则益之；其二，根据治历者当时掌握之实测回归年 t 与朔望月 u 经推算而得。

由于历史文献上迄今未发现任何可资引征的线索，我们无法断定历家究竟采用哪一种方式选择其闰周。以历法之神圣与严肃而言，后一种方式为历家普遍采取之手段，恐无异议。一个理想的算法是将 t/u 按连分数展开求其渐近分数，但由于此算法在中国天算史上的应用尚需进一步的确证，所以我们不拟由此展开。一个简明的算法，是假定历家认定所取闰周必如式(4-1)，于是可令

$$\frac{t}{u}=\frac{235x+136}{19x+11}$$

解之，得

$$x=\frac{11t-136u}{235u-19t} \tag{4-2}$$

令 $m=[x]$，表示 x 的整数部分。如以截尾法取 x，则由式(4-2)立得新历闰周式(4-1)。倘若按四舍五入法取 x，则 $[x-0.5]=m$ 时，有

$$\frac{p}{q}=\frac{235(m+1)+136}{19(m+1)+11} \tag{4-3}$$

否则，得式(4-1)。这个算法的应用，对于已知加成法则的中国历法家来说绝不会感到困难而有所障碍，其简明与实用是显而易见的。那么，由此所获得的结果到底如何呢？定理1可以回答这个问题。

定理1　对于任意给定的正实数 x，及非负整数 a_1,a_2,b_1,b_2，如果 $|a_1b_2-b_1a_2|=1$，定义函数

$$f(m)=\frac{a_1+a_2m}{b_1+b_2m}$$

其中,$m=[x]$,表示 x 的整数部分,则有

(1) 如果 $f(m)$ 存在,则 $f(m)$ 是 $f(x)$ 的一个渐近分数。

(2) 如果 $1/2<x-m<1$,则 $f(m+1)$ 是 $f(x)$ 的一个渐近分数。

我们将在第三节中讨论定理 1 的证明。根据定理 1,可以知道式(4-1)是 t/u 的一个渐近分数;当 $[x-0.5]=m$ 时,式(4-3)也是 t/u 的一个渐近分数。定理 1 保证了按上述方式确定之闰周必然是实测数据的一个非常漂亮的近似分数,它与连分数算法殊途同归。因此,中国古代历法家选择闰周式(4-1),无需借助连分数算法,亦能轻易取得极好的数据。

三、闰周对基本常数的影响

假设 $[a_0,a_1,\cdots,a_k]$ 表示有理数 $m/n=\varphi_k$ 的连分数展式,可以得到如下的定理:

定理 2 当 $a_k>1$ 时,令 $\varphi_k=[a_0,a_1,\cdots,a_k]$,$\varphi_{k+1}=[a_0,a_1,\cdots,a_k,1]$,则实数 θ 以 φ_k 为其渐近分数的充要条件为:θ 介于 φ_k 与 φ_{k+1} 之间。

我们将在第四节证明定理 2。根据定理 2,立刻得到如下的推论:

推论 回归年与朔望月的比值 t/u 以式(4-1)为其渐近分数的必要条件为

$$\frac{p}{q}<\frac{t}{u}<\frac{p+235}{q+19}$$

假设 $f(x)=\dfrac{t}{u}=\dfrac{235x+136}{19x+11}$,由定理 1 知,通常存在 $m=[x]>0$,使 $f(m)$ 为 t/u 之渐近分数,推论表明,只要 t/u 介于

$f(m)=p/q$ 与 $f(m+1)$ 之间，便可按式(4-2)求得其渐近分数 $f(m)$。由此可导出如下命题：

命题 1 如果章月 $p=235m+136$，章岁 $q=19m+11$，则当朔望月 $u=U/A$ 时，有

$$0<t-\frac{T}{B}<\frac{365.25}{p(q+19)}$$

而当回归年参照值 $t=T/B$ 时，则有

$$0<\frac{U}{A}-u<\frac{29.5306}{q(p+235)}$$

表 4-2 闰周对朔望月或回归年历取值精度的影响

历名	闰周		历取朔望月	令 $t=T/B$ 时	历取回归年	令 $u=U/A$ 时
	章月 p	章岁 q	$U/A=29.$	$0<U/A-u<$	$T/B=365.$	$0<t-T/B<$
元始历	7421	600	530 600 09	6.43×10^{-6}	244 305 5	7.95×10^{-5}
大明历	4836	391	530 591 52	1.49×10^{-5}	242 814 8	1.84×10^{-4}
正元历	6246	505	530 592 91	9.02×10^{-6}	243 729 4	1.12×10^{-4}
兴和历	6951	562	530 604 70	7.31×10^{-6}	244 187 4	9.04×10^{-5}
大同历	7656	619	530 598 95	6.05×10^{-6}	244 370 9	7.48×10^{-5}
九宫历	6246	505	530 639 60	9.02×10^{-6}	244 306 9	1.12×10^{-4}
天保历	8361	671	530 599 55	5.08×10^{-6}	244 590 0	6.29×10^{-5}
天和历	4836	391	530 710 64	1.49×10^{-5}	244 288 2	1.84×10^{-4}
甲寅元	8126	657	530 595 33	5.38×10^{-6}	244 471 3	6.65×10^{-5}
武平历	7656	619	530 594 40	6.05×10^{-6}	244 314 7	7.48×10^{-5}
孟宾历	7656	619	530 590 72	6.05×10^{-6}	244 269 0	7.48×10^{-5}
大象历	5541	448	530 627 48	1.14×10^{-5}	243 765 4	1.41×10^{-4}
开皇历	5306	429	530 612 35	1.24×10^{-5}	243 424 6	1.54×10^{-4}
皇极历	8361	676	530 595 81	5.08×10^{-6}	244 543 7	6.29×10^{-5}
大业历	5071	410	530 594 40	1.36×10^{-5}	243 034 7	1.68×10^{-4}
戊寅元	8361	676	530 601 26	5.08×10^{-6}	244 611 1	6.29×10^{-5}

注：本表系据命题 1 算出。

命题 1 表明，倘若按截尾法由式(4-2)选择 m，当假定历取朔望月 U/A 与其参照值 u 精度相同时，则由已确定之闰周 p/q 与朔望月 U/A 导出之历取回归年 T/B 必将是实测数据 t 的不足近似值；而倘若假定历取朔望月 U/A 为导出常数，则当历取回归年 T/B 与其参照值 t 精度相同时，U/A 必为实测朔望月 u 的过剩近似值。如果按四舍五入法依式(4-2)选择历取闰周 p/q，类似地有如下结果：

命题 2　如果章月 $p=235\times[x+0.5]+136$，章岁 $q=19\times[x+0.5]+11$，则当 $u=U/A$ 时，有

$$\frac{-365.25}{p(2q-19)}\leqslant t-\frac{T}{B}<\frac{365.25}{p(2q+19)} \tag{4-4}$$

此时回归年参照值 t 的采集范围为

$$u\times\frac{2p-235}{2q-19}\leqslant t<u\times\frac{2p+235}{2q+19}$$

而当 $t=T/B$ 时，有

$$\frac{-29.5306}{q(2p-235)}\leqslant\frac{U}{A}-u<\frac{29.5306}{q(2p+235)} \tag{4-5}$$

此时朔望月参照值 u 的采集范围为

$$t\times\frac{2q+19}{2p+235}<u\leqslant t\times\frac{2q-19}{2p-235}$$

命题 1 与命题 2 的证明相似，以下仅给出后者的证明。

命题 2 之证明　设 $f(x)=\dfrac{t}{u}=\dfrac{235x+136}{19x+11}$，因为

$$f([x+0.5]-0.5)\leqslant f(x)<f([x+0.5]+0.5)$$

所以

$$\frac{2p-235}{2q-19}\leqslant\frac{t}{u}<\frac{2p+235}{2q+19}$$

设 $u=U/A=(q/p)\times(T/B)$，因为 $235q-19p=1$，故有

$$\frac{-T/B}{(2q-19)p}\leqslant t-\frac{T}{B}<\frac{T/B}{(2q+19)p}$$

令不等式两端之 $T/B=365.25$，即证式(4-4)。同理可证式(4-5)。

如果假设古章法 19 年 7 闰亦为参照值 u 与 t 推得的渐近分数，则类似命题 2，可以得到其历取值与参照值之间的误差有如下之估计：

命题 3 如果令 $u = U/A$，且 $T/B = 235u/19$，则有

$$0 < \frac{T}{B} - t < \frac{365.25}{30 \times 235} = 0.0518$$

如果令 $t = T/B$，且 $U/A = 19t/235$，则有

$$0 < u - \frac{U}{A} < \frac{29.5306}{19 \times 371} = 0.0042$$

四、分析与结论

1. 唐代以前大多数历法以回归年为导出常数

对于采用闰周制的中国历法，回归年 T/B 作为导出常数的一个基本特征是纪法 B 整个地包含章岁 q 为其因子，一般说来，这个条件虽非充分，但作为大范围统计分析的一个判断指标，却具有一定的参考价值。在历史上 25 部有闰周的历法中，除《四分历》与《太始历》外，皆符合上述情形；与之相反，使日法 A 整个地含有章月 p 为其因子的历法却仅 9 部，约 1/3 强。由此得出的结论是，当时历家选择此三个重要的基本常数的一般模式为

定闰周→调日法 A→取朔望月 U/A→导出回归年 T/B

笔者认为，中国历家主要是依据实测朔望月 u 与回归年 t 来推算其闰周式(4-1)的。不过有必要说明的是，这里所言的实测值并非一定指当时观测的结果，它也可以是治历者通过对旧历数据之误差的校正、核实与推算而认定的某个结果。

2. 中国历法家可以不利用连分数之类的复杂算法而获得与之类似乃至相同的闰周

对于中国天算家而言，采用式(4-2)求取形如式(4-1)的闰周，

没有丝毫技术性的困难，此捷法求取的结果，如为实测值的不足近似值，则必为其一渐近分数；若按四舍五入法取实测值的过剩近似值，亦为其一渐近分数。

3. 回归年为导出常数时历家选择之闰周对其精度的影响不大

革新闰周中的周期最小者为《大明历》所设章月 $p=4836$，章岁 $q=391$，假定历取朔望月 U/A 等于其实测值 u，则由命题 1 知，《大明历》之导出常数回归年 T/B 与其参照值 t 的最大误差为 1.84×10^{-4}，如果独立选择历取回归年并保证达到这样的精度，则相当于把纪法 B 取至 10 000 左右，考察废除闰周制之唐宋元历法中回归年的法度即可发现，对回归年而言，误差为 1.84×10^{-4} 绝对在可允许之范围以内。如果考虑到历取朔望月 U/A 与其实测值 u 的误差 $\Delta=u-U/A$，则只需对命题 1 的第一个不等式两端加上修正项 $\Delta p/q=12.36\Delta$。

考察革新闰周之历法中的日法 A，一类属于大于 50 000 者，另一类仅数千左右。前者系由章月 p 直接调取，其值足以确保历取朔望月 U/A 与实测值之误差控制在 10^{-5} 以内；后者则系得自调日法，亦可保障历取朔望月 U/A 精度达到 10^{-5}。这样，即使对命题 1 加上修正项 12.36Δ，导出常数 T/B 的误差仍然得到了较好的控制。

另外，由命题 3 可知，如果采用 19 年 7 闰制，则导出常数无论是朔望月 U/A 还是回归年 T/B，其精度均很难得到保障。

由此可见，在回归年 t 与朔望月 u 之比值的一系列渐近分数中，中国古代历法家所采用的闰周式(4-1)的确做到了简明与精度十分完美的统一。相对而言，由于中国古代历来对朔望月常数的精度要求很高，常达 10^{-5} 以上，如果假定朔望月为导出常数，类似的分析将表明，命题 1 提供的误差控制只能算差强人意。这或许能从另一个角度说明历家通常不采取这种方案的原因。

4. 对于闰周式(4-1)之形式与性质的研究,有助于我们通过历取朔望月与回归年探索当时历家实际掌握数据的范围

中国历法的天文周期多用分数表示,其法度(分母)通常需要特别的选择,往往为了使所取数据形式简单但又不损伤其精度,并不用十进分数。因此,其历取值一般应根据某参照值换算而来。理论上讲,这个过程肯定要产生些微的误差,有些误差是命分时造成的(例如,由日法 A 推朔望月 U/A),有些则是某些算法带来的(例如,由闰周 p/q 及朔望月 U/A 导出回归年 T/B)。如果我们能够从算法上弄清楚各种误差的上限,就有可能推断不同时代历法家的取值标准与误差控制范围。

本节有关中国历法之闰周性质的讨论,正是基于这样的想法而进行的一次尝试。由于我们目前尚无法断言当时的治历者确系据式(4-2)推求各自历取闰周,因此,有关问题有待进一步的讨论。

第二节 调 日 法

传统中国历法中的天文常数,几乎都用分数表示,它们通常是在确定了某一法度(分母)之后,再参照该常数之预定值及误差控制而获得的。因此,这些法度的选择,对于保障历取数据的精度至关重要。朔望月之分母日法 A 就是最受研究者关注的一个法度。

日法 A 在唐代李淳风《麟德历》(665)废除闰周制之后,几乎成为古历中所有天文常数之分母的一个公因子。"调日法"就是用以选择日法 A 的一种算法。据史料记载,大约从刘宋《元嘉历》(443)作者何承天开始,历算家基本上都采用一种叫"调日法"的数学方法来求取各自历法的日法朔余。

简单说来,调日法就是利用分数的加成性质而设计的一种实数的有理逼近算法,其步骤大体如下:假设 θ 是所需逼近的实数,首先选择两个分数

$$\frac{a_1}{b_1} > \theta > \frac{a_2}{b_2}$$

分别称之为强率与弱率。根据分数的加成法则,我们知道,对于任意的自然数 m 与 n,必有

$$\frac{a_1}{b_1} > \frac{a_1 m + a_2 n}{b_1 m + b_2 n} > \frac{a_2}{b_2}$$

其中,m 与 n 分别称为强数与弱数。通过选择适当的强数 m 与弱数 n,即可得到一个所逼近实数 θ 的一个很好的近似分数

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1 m + a_2 n}{b_1 m + b_2 n}$$

所谓调日法,就是选择强数 m 与弱数 n 的算法。它被元代《授时历》之前的历法家用以选择其历法中的朔望月常数,应该是不争的事实。由于已知朔望月满足

$$29\,\frac{26}{49} > u > 29\,\frac{9}{17}$$

于是,适当调取权数 m 与 n,以使

$$\frac{26m + 9n}{49m + 17n}$$

达到对实测朔望月之奇零部分的逼近要求,即可取为历法中的朔望月常数。其中,26/49 与 9/17 分别被称为强率与弱率。日法 $A = 49m + 17n$,历取朔望月

$$U/A = 29 + \frac{26m + 9n}{49m + 17n}$$

系"累强弱之数"而得。[4-6]

作为一种治历的数学手段,调日法的思想方法在诸如闰周、近点月等历取常数的选择中得到了广泛的应用。弄清楚调日法的本来面目,事实上等价于找到中国古代历算家求取朔望月等许多历取常数的算法。但是,何为调日法?迄今未在正史中看到明确的记载。因此,自清代以来,对调日法的探讨便一直吸引着天算史界的兴趣,近年来尤为热烈,取得了出人意料的、突破性的进展。[7]

不过,依笔者之浅见,此一探索虽已相当深入,却似未彻底完成,天算史界亦尚未达成共识,所以有继续讨论之必要。本节拟就对日法 A 的综合特征的分析,在前人研究工作之基础上,给出调日法的一种普适法则,并以唐代之前各历日法的调取为例,对这个假想方案的合理性进行初步的考验。

一、当代调日法研究的疏漏

1. 当代调日法研究观点综述

有关调日法的记述,目前发现的可资引证的史料仅3条,均出自宋代人的著述(见文献[4~6])。三者的论述大体一致,虽详略有殊,但无明显矛盾之处。现代天算史家普遍据此认为,调日法作为一种治历的算法,为何承天所创。但是,何承天调日法究竟如何"调"呢?这仍然是一个有争议的问题。目前业已发表的主张,大体如以下3类:

第一,支持秦九韶说。秦九韶在《数书九章》治历演纪题之术文的一开始写道:

> 调日法,如何承天术,用强弱母子互乘得数,并之为朔余。

秦氏调日法说的主要思想是:已知日法 A,求解不定方程 $A=49m+17n$,调取得强弱二数 m 与 n,再与强弱二率(26/49 与 9/17)之分子互乘,得朔余 $26m+9n$,由此确定历取朔望月常数。[8] 严敦杰认为:

> 按秦法与累强弱之数的"累"义不合,当不是调日法本法。[9]

基本上否定此说。李继闵近年来撰著鸿文多篇,依算理分析、数据考证、探源索流,从多方面论证和宣扬秦氏调日法的合理性与实用性,反驳批评者的否定性论点。[10]

第二,支持李锐说。清代学者李锐曾对历史上数十部历法的日法朔余推演考证,遂悟得一法,认为调日法的真谛在于"累强弱之数,得中平之率",并且撰著成文,[11]颇受世人推崇。李锐调日法说的主要思想是:反复利用加成法则,通过与实测值的逐次比较,不断累加强数 m 与弱数 n,使所得中平之率 $\frac{26m+9n}{49m+17n}$ 的精度达到一定的标准为止。

李锐之说曾获顾观光的补充与宣扬,李潢("复李锐书",见文献[11])、严敦杰(见文献[9])、刘钝等人皆对李锐的调日法说持认同态度,认为"李锐的考证说明了调日法的本法","大致反映了古代调日法的原貌。"[12~13]

第三,陈久金认为,调日法作为一种治历的算法,是手段而不是目的。因此,历家据此选择日法朔余时,未必拘泥于强弱二率,不一定非要像李锐所说的那样逐次逼近。陈久金给出的算法是:历家通常可以选择前任历法中的某两个日法朔余为强弱二率,根据加成法则,即可直接调取新历的数据。[14]

2. 日法的特征

通览历代中国历法的日法朔余,我们发现一个胜任的日法 A,往往具有如下特征:

第一,多数日法含有特别的因子。按类型划分,这些因子分别属于如下 3 种情形之一:

(1) 在采用闰周制的历法中,约 1/3 强的日法 A 含闰月中之章月数为其因子。此类日法均比较庞大,基本上在 50 000 以上。

(2) 在采用闰周制的其他历法当中,除《三统历》外,各个日法均与其章月数拥有非平凡的公因子。此类日法绝大多数在 15 000 以下,其中近半数仅在 1000 左右。

(3) 32 部唐宋元期间的历法中,除 3 部例外,其余皆含有 10^n $(n=1,2,3)$ 为日法 A 的因子。此间历法之日法多在 1000 上下。

第二,历取朔望月精度很高,日法普遍较小。自《乾象历》之后,历取朔望月值大体在 29.530 59 ~ 29.530 60 之间,精度达 10^{-5};宋代历法则基本上稳定在 29.530 590 ~ 29.530 595 之间。若随意选择日法,欲保障历取朔望月精度达到 10^{-5} 日.则应令 $A>50\ 000$;对宋代历法,更需取 $A>100\ 000$。但事实上,除了前述(1)类之全部与(2)类之个别日法外,所有历法之日法几乎都小于 50 000,通常只有数千。

第三,日法朔余有时需要反复调取。作为基本常数,历家通过调日法而确定的朔望月与回归年所布列的同余式组,并非总能够保证推算出合用的上元(见文献[1]),因此历家调日法、择朔余并不仅仅考虑其数据的精度,还要通过对上元的推算来考验它是否适用。倘顺利求出上元,一般便采用之;否则,就需要重新选择日法朔余(参见本书第二章第二节)。

3. 当代调日法研究的疏漏

李继闵曾对李锐所列 51 家历法的日法按李锐调日法详加考验,发现此说对朔望月实测数据的精度标准要求极高,常达 10^{-8} 日以上。他按 10^{-6} 日之精度标准取值,一一进行验算,结果多与之不合,其中,42 部历法的日法朔余将得以简化,并且许多历法的历取朔望月将会采用相同的数据。[15] 另外,李锐之法运算量较大,收敛速度似嫌太慢。虽然在算法上不无合理之处,但因其通常不能预见所求日法之因子构成,所以它无法满足上述日法的第一个特征。因此,李锐调日法似乎不能够认为是何承天调日法的普遍算法。

陈久金的方案比较简捷,诚然不失为一种可行的算法。作为加成法则的应用与调日法的补充,它为古代历算家所掌握应该说是不成问题的。这个算法曾用来推求一些历法的朔望月甚或其他历取常数都是可能的。但是,若期望所求日法中含有特别的因子时,此法通常不能胜任,因此,也无法满足日法的第一个特征。

按秦九韶之说,已知日法,推求强弱之数 m 与 n,将无法解释日法的第二个特征因此而产生的矛盾:日法普遍太小,远不足以保障所推之数的精度。把调日法视为“有日法求强弱之数术”,其前提恐怕就是有问题的。因为,调日法的目的是为了选择形式简单并达到一定精度标准的历取朔望月值,而并非在于求取强弱二数 m 与 n。倘若已知日法,便可以通过参照值的直接命分获得历取朔望月值,根本无需舍简就繁推求强弱二数。因此,秦九韶演示的算法,也很难认为是完整的何承天调日法。

二、调日法本术试探

由以上讨论可见,日法的第一个特征,表明了它构成的特别;日法的第二个特征,证明它并非是随便可取的数字;日法的第三个特征,说明合乎精度要求的日法未必一定合用。调日法的目的,就在于为治历者提供多个可供选择的、含有特别因子的、达到一定精度标准的、简单的日法及朔余。真正阐明古义的调日法,应该全面符合日法的上述 3 个特征,尤其不能无视那些特殊因子的存在。

笔者关于调日法本术的探索,正是基于如上的思考。而李继闵有关调日法数学原理的论述,[7]乃是这一尝试的理论基础。

1. 何承天的调日法

假令历取朔望月常数的奇零部分(日法朔余)表示为如下形式

$$H_n^m=\frac{26m+9n}{49m+17n}$$

称 H_n^m 为何承天数。当治历者依 H_n^m 调取朔望月之奇零部分时,只需将强弱二数的比值(m/n)控制在某个范围,由此对应的日法朔余 H_n^m 便保证了历取朔望月的精度。由于映射

$$X:H_n^m\to m/n$$

具有很强的放大功能,H_n^m 的些微变化,便能引起 m/n 的剧烈振动,若 m/n 为既约分数时,X 为双向单值映射。例如,当 $19 \leqslant m/n \leqslant 33$ 时,必有

$$0.530\,59 < H_n^m < 0.530\,60$$

调日法的这个优良品质,为历家选择多个合用的日法朔余提供了理论上的保障。以下是笔者设想的调日法:假令所求日法 A 含有特别因子 α,于是取 $A = \alpha x$,因为 $A = 49m + 17n$,故有

$$\alpha x \equiv 17n \pmod{49} \qquad (4\text{-}6)$$

因为,通常$(\alpha, 49) = 1$,所以存在整数 k,使

$$k\alpha = 1 + 49\beta$$

于是,解式(4-6)得

$$x = 17nk - 49s$$

其中,s 为可调整之整数。所以根据 $A = \alpha x$,得

$$A = 17n + 49(17n\beta - \alpha s)$$

令 $m = 17n\beta - \alpha s$,则有 $m/n = 17\beta - \alpha s/n$,其中,$\alpha$ 与 β 为已知,适当选择 s,根据上述调日法所具有的映射

$$X: H_n^m \rightarrow m/n$$

只需把 m/n 控制在某个比较宽泛的区间内随意取值,则对应的 H_n^m 便落在某个可允许的误差范围内而达到历取值所要求的精度。一般说来,上述算法可能在调取

$$m/n = 17\beta - \alpha s/n$$

时,因 17β 较大而显得不十分简便,这一步可通过适当的简化使之更加易算。具体变化从求出 k 与 β 开始:因为

$$\alpha x \equiv 17n\alpha k \pmod{49\alpha} \equiv 17n + 49n\gamma \pmod{49\alpha}$$

其中,$0 \leqslant \gamma < \alpha$,由 $17\beta \equiv \gamma \pmod{\alpha}$导得。由上面的同余式可得

$$A = 17n + 49(\gamma n + \alpha t)$$

其中,α, γ 为已知,令 $m = \gamma n + \alpha t$,则

$$m/n = \gamma + \alpha t/n$$

调整整数 t,使 m/n 落在某个既定的区间内即可确定所求之强弱

二数 m 与 n。

以上算法，能够符合日法的所有特征。由于何承天时代孙子定理已为中算家所掌握，假定何承天之后的历算家具有求解同余式(4-6)的能力，并非毫无根据。另外，从秦九韶所示调日法算草中有关强弱二数 m 与 n 的调取程序来看，他的关于强弱二数换算的结果，事实上是在利用映射

$$X: H_n^m \to m/n$$

的性质(见文献[6,8])。因此，笔者以为这个算法可能就是后世所称的何承天调日法的普遍法则。

2. 对采用古章法之历法的验证

在刘洪《乾象历》与何承天《元嘉历》之间，共有 7 部历法采用 19 年 7 闰制，其中《乾象历》($A=1457$)、《黄初历》($A=12\ 079$)、《景初历》($A=4559$)、《永和历》($A=12\ 079$)、《三纪历》($A=6063$)、《元嘉历》($A=752$)等 6 部历法的日法 A 与其章月 235 的最大公因子均为 47；而《刘智正历》($A=35\ 250$)则整个以章月 235 为其日法 A 之因子。

此间历法之朔望月值在 29.530 58 ~ 29.530 60 日之间(《乾象历》除外)。原则上讲，小于 10 000 的日法，是不足以确保历取朔望月常数达到这样的精度的，因此，需要一定的推算选择。按上述调日法，设 $A=47x=17n+49m$，则

$$47x \equiv 17n \pmod{49}$$

因为，$24\times 47=1+23\times 49$，求解上式，得

$$\begin{aligned}47x &\equiv (24\times 47)17n \pmod{49\times 47}\\ &\equiv 17n+49\times 15n \pmod{49\times 47}\end{aligned}$$

所以，$A=17n+49(15n+47t)$，令 $m=15n+47t$，则

$$m/n=15+47t/n$$

欲获得日法 A 含 47 为因子，而 $29.530\ 58<u<29.530\ 60$ 的历取朔望月常数，只需将强弱数之比 m/n 控制在 13 与 33 之间。

例如,$n=1$ 时,只有 $t=0,m=15$,此时得

$$A=17+15\times49=752,u=29+H_1^{15}=29\frac{399}{752}$$

是为何承天《元嘉历》之数。$n=3$ 时,只能取 $t=1,m=92$,此时得

$$u=29+H_3^{92}=29\frac{3\times9+92\times26}{3\times17+92\times49}=29\frac{2419}{4559}$$

是为《景初历》历取朔望月常数。

适合作此间历法之日法 A 的数的分布,随着选择范围的缩小,密度越来越小,通过简单的计算可知,10 000 以内含 47 为因子的数共 212 个,适合作日法者不过 22 例,当 m/n 限于既约分数时,则仅有 10 例;5000 以内共 106 个含 47 为因子的数,适合作日法者仅 7 个,限于既约分数,则只有上述两例。由此可见,《元嘉历》等日法 A 的选取,诚可谓百里挑一,理应是某种算法的结果。

3. 革新闰周时期的日法选择

从赵歐《元始历》起,大约有 16 部历法分别采用了 10 种新的闰周和 15 种不同的日法。其中有 9 部历法的日法 $A\geqslant50\ 000$,若按 10^{-5}日控制历取朔望月常数的精度,则此类大小的数皆可胜任日法 A,无需用到调日法。姑且不论。

而另外 7 部历法,除《戊寅元历》日法 $A=13\ 006$ 之外,其余皆在 4000 以下。它们的共同特点是皆与各自章月拥有非平凡的公因子。显然,如此大小的数,通常是无法保障历取朔望月常数达到 10^{-5}标准的,必定经历某种特别的选择,才获取其各自的日法 A。由于此间历取朔望月基本上保持

$$29.530\ 59\leqslant u\leqslant29.530\ 60$$

所以,我们依前述调日法程序对第二类日法——算草时,将令强、弱二数之比保持

$$18<m/n<33$$

通过具体验算发现,在上述精度标准下,除《大明历》外,其余 6 历

的日法朔余均是可能获得的结果中最简单的分数。其中《大同》、《武平》、《皇极》、《大业》4 历的日法朔余均为 $n=1$ 时的唯一选择,而《孟宾历》在 $n=1$ 时,也只有 H_1^{19} 与 H_1^{31} 两种不同的选择,且后者与《大同历》取数相同。

表 4-3 列出的数据显示,按《戊寅元历》日法特征,在 $n=1,2,3,4,5,6$ 时,均无合适的强数 m。而 $n=7$ 时,所得 $m=263$,虽然稍稍超出了我们所做的取值限定范围,但却是可能情形中的最佳选择。只有祖冲之的《大明历》,存在着比历取值更简单的两种日法朔余。《大明历》之所以没有采用这两种日法朔余,笔者认为主要与大明上元的推算有关。

据记载,祖冲之曾于大明五年(461)测算当年冬至发生时刻,

表 4-3　革新闰周之 7 部历法的朔望月常数推算数据

历名	大明历	大同历	武平历	孟宾历	皇极历	大业历	戊寅元历
作者	祖冲之	虞邝	刘孝孙	张孟宾	刘焯	张胄玄	傅仁均
年代	463	544	576	576	604	608	618
章月	4836	7656	7656	7656	8361	5071	8361
日法	3939	1536	1144	948	1242	1144	13 006
α	39	24	88	12	9	11	929
β	35	23	79	11	2	2	455
γ	10	7	23	7			303
k	44	47	44	45	11	9	24
t	1　1　1	1	0	1			
s					1	1	2
m	59 69 79	31	23	19	25	23	263
n	2　3　4	1	1	1	1	1	7
m/n	29.5 23 19.75	31	23	19	25	23	37.57
$u=29.$	530 591	530 599	530 594	530 590	530 595	530 594	530 601

注:本表 α、β、γ、k、t、s 诸栏数据皆依本节"二、1"中的算法给出。其中,$m=17n\beta-\alpha s=n\gamma+\alpha t$,$u$ 为历取朔望月常数的约取值。

结果为前11月初三夜半后31刻。① 笔者曾据此布列同余式组，恰将大明上元推出，结果为大明五年前11月初三的31刻60分冬至，与测算记录吻合。[16]

经笔者验算发现，若改用其他几种日法朔余，则所推结果无一能使大明五年前11月冬至发生在初三的31刻前后。果若如此，祖冲之在驳斥戴法兴对《大明历》的非难时，便不能理直气壮地声称"窃谓至密"了。[16]

三、唐宋时期的调日法

何承天究竟如何调日法？并无确凿的文字记录。清代以来，便有李锐(1769～1817)等一批学者对此进行了深入钻研，得出了各种推测，但是仍然没有定论。我们将根据秦九韶《数书九章》(1247)中有关调日法的算草推论，就唐家历法中8种形如$100x$之日法的数源进行分析，进而导出这个历史时期中调日法的一般模式。

1.《数书九章》中的调日法

秦九韶在《数书九章》中"治历演纪"题的算草中，大概给出了当时行用之《开禧历》的朔望月常数$29\dfrac{8967}{16\,900}$的调取算法。这是迄今为止，可以查到的唯一有关该算法的具体记录。[17] 按秦九韶之意：已知日法$A=16\,900=49m+17n$，求解强、弱二数m、n=？

第一步，令$x=169$为上位，$3x=507$为下位，利用$100=49+3\times17$，得到日法$A=100x$的一个分解

$$100x=49x+17\times3x$$

①宋书律历志(卷13).中华书局编.历代天文律历等志汇编(6).北京：中华书局，1976，1767。

第二步，以 49 除下位 $3x=507$，得

$$3x=49a+b$$

其中，$b<49$，$a=10$ 为得数，$b=3x-49a=17$ 为余数。通过恒等式

$$100x=49(x+17a)+17(3x-49a) \tag{4-7}$$

得 $m=x+17a=339$，$n=3x-49a=17$。

最后，将 m，n 代入式(4-7)，便得《开禧历》的何承天数

$$H_{17}^{399}=\frac{8967}{16\ 900}$$

2. 关于 100*x* 型的调日法

秦九韶的演草，实际上仅仅是求朔余$(26m+9n)$的过程，他并没有“调”日法$(A=16\ 900)$，这是不对的。原因是：第一，日法 A 之大小，事先不能假定；第二，如果已知日法 A，则朔余不必待强、弱二数 m、n 确定后求解。确切地说，对 $100x$ 型之日法，调日法的目的就是通过求解如下的不定方程

$$100x=49m+17n \tag{4-8}$$

来确定 $x=?$ $m=?$ $n=?$ 而这个重要的过程却被秦九韶忽略了。就目前已知的唐宋历法中，共有 8 个 $100x$ 型的日法在不同的历法中选用。相应的何承天数 H_n^m 介于 0.530 588 与 0.530 595 之间，由于 $H_n^m=H_1^{m/n}$，当 m/n 为既约分数时，有双向单值映射

$$X:H_n^m\to m/n$$

因此，不难算出这 8 个 $100x$ 型之日法的强弱数之比 m/n 的范围：$17\leqslant m/n\leqslant 24$。比较秦九韶用过的恒等式(4-8)与式(4-7)，可得

$$m=x+17a,n=3x-49a \tag{4-9}$$

令 $\theta=m/n$，则可以解得

$$\frac{x}{a}=\frac{49\theta+17}{3\theta-1} \tag{4-10}$$

由前所述，当 $H_n^m\geqslant 0.530\ 588$ 时，有 $\theta=m/n\geqslant 17$，令 $\theta=17$，则由式(4-10)，即得 $x/a=17$，代入式(4-9)，得 $m=34$，$n=2$，所以，

$$H_2^{34}=\frac{902}{1700}=0.530\ 588$$

这个结果就是宋代《王睿历》(995)中所选择的日法朔余。又,当 $\theta=24$ 时,由式(4-10)得 $x/a=1193/71$,若直接令 $x=1193$,则所取日法 $A=119\ 300$,显然太大,是否可以由此得到一个较简单的数值呢?如果注意到 17 是 x/a 的一个简明取值,可以用它与 1193/71 的加权加成来选择可约简的分数

$$\frac{x}{a}=\frac{1193-17}{71-1}=\frac{84}{5}$$

代入式(4-9),得到 $m=169$,$n=7$,所以有

$$H_7^{169}=\frac{4457}{8400}$$

这是唐代《宣明历》(892)中的日法朔余。按照上述算法,可以得到非常有趣的结果,如表 4-4 所示,全部 8 个 $100x$ 型之日法,恰好是 θ 按式(4-10)取 17～24 时的对应值,不重复无遗漏,这恐怕不是巧合吧。①

表 4-4 唐宋历法中 $100x$ 型日法的数源

θ	$\frac{49\theta+17}{3\theta-1}=\frac{x}{a}$	$100x$	m	n	历法
17	$\frac{17}{1}$	1700	34	2	王睿历
18	$\frac{899}{53}\approx\frac{899-7\times17}{53-7}=\frac{390}{23}$	39 000	781	43	明天历
19	$\frac{237}{14}$	23 700	475	25	奉元历

①有两点应该指出,其一,这个算法强调的是 θ 取整数,然后调取 x/a。当 θ 不为整数时,也可以得到更多符合精度要求的 H_n^m,但是,那需要用到别的算法。其二,调取 x/a 的过程中,对 17/1 的加权的不同,可能得到不同的合乎需要的结果。换句话说,满足精度要求的 $100x$ 型日法,应当不止那 8 个结果。

续表

θ	$\frac{49\theta+17}{3\theta-1}=\frac{x}{a}$	100x	m	n	历法
20	$\frac{997}{59}\approx\frac{997+17}{59+1}=\frac{169}{10}$	16 900	339	17	开禧历
21	$\frac{523}{31}\approx\frac{523+17}{31+1}=\frac{135}{8}$	13 500	271	13	崇玄历
22	$\frac{219}{13}\approx\frac{219-17}{13-1}=\frac{101}{6}$	10 100	203	9	仪天历
23	$\frac{1144}{68}\approx\frac{1144+17}{68+1}=\frac{387}{23}$	38 700	778	34	会元历
24	$\frac{1193}{71}\approx\frac{1193-17}{71-1}=\frac{84}{5}$	8400	169	7	宣明历

3. 10x 型日法的一种普适算法

如果将 100x 型的日法看成是 10x 型日法的特例，那么，几乎所有唐宋历法都选择了这种类型的日法。

我们注意到这样一个事实，在前面的讨论中，可以发现，由秦九韶恒等式(4-7)所推导出来的算式(4-10)，是根据何承天数 H_n^m 与强弱数之比 $\theta=m/n$ 之映射关系来运算的。表 4-4 的结果基本上应该表明，唐宋时期的历算家事实上应当洞悉了 H_n^m 与 $\theta=m/n$ 之间的对应关系；这个关系的实质是，H_1^θ 与 θ 是双向单值映射，当 $\theta=m/n$ 在一个相当大的区间任意取值时，对应的 H_n^m 可能被控制在一个相当小的范围变化。根据

$$\theta=\frac{m}{n}=\frac{17H_1^\theta-9}{26-49H_1^\theta}$$

不难算出，当 $0.530\,588<H_n^m<0.530\,595$ 时，则有 $17\leqslant\theta\leqslant24$，而唐宋时期朔望月的取值精度，一般在 29. 530 590 ~ 29. 530 595 之间。因此，可令 $m/n=17+p(0\leqslant p\leqslant7)$，将其代入 $10x=49m+17n$，则令 $t=np/10$，有

$$x=85n+49t \tag{4-11}$$

其中，$0\leqslant t\leqslant 0.7n$，当式(4-11)中的 n 取 1，2…时，相应的 t 在 $(0, 0.7n)$ 中选取整数值，由此所获之日法 $A=10x$ 便全部可以保障其何承天数 H_n^m 的精度。根据式(4-11)，可以很容易导出所有合乎精度要求的 $10x$ 型之日法 A，由它确定的三元数组 $(n,t;A)$，给出了全部唐宋历法中 $10x$ 型之日法 A 的数据如下(按治历年代为序)。

《麟德历》：(1，1；1340)；　《大衍历》：(3，1；3040)；
《乾元历》：(0，6；2940)；　《至道历》：(9，6；10 590)；
《观天历》：(13，2；12 030)；　《占天历》：(29，7；28 080)；
《纪元历》：(8，1；7290)；　《重修大明历》：(4，2；5230)；
《统元历》：(7，2；6930)；　《乙未元历》：(18，11；20 690)；
《淳祐历》：(3，2；3530)；　《会天历》：(8，6；9740)；
《成天历》：(7，3；7420)。

另外，可以由(2，1；2190)推出

$$H_n^m=\frac{1162}{2190}=\frac{581}{1095}$$

此数是《正元历》的日法朔余。在上面的数据中，《麟德历》与《乾元历》的 t 值逃出了 $(0, 0.7n)$ 之范围，可知其朔望月精度未达到我们规定的标准。

显而易见，根据式(4-11)，也应可以导出 $100x$ 型日法 A。事实上，如果将 $m=17n+pn\ (0\leqslant p\leqslant 7)$ 代入式(4-8)，则精度在 0.530 588 ~ 0.530 595 之间的所有 $100x$ 型日法 A 的何承天数 H_n^m 都可由下面的通解公式给出

$$x=\frac{17n+49t}{2}$$

其中，$t=pn/50$。因为，$0\leqslant p\leqslant 7$，所以，令 $n=7t+2s\ (s\geqslant 0)$，代入上式，则有更简明的求解 $100x$ 型之日法 A 的公式

$$x=84t+17s,\ (t=0,1,2\cdots;s=0,1,2\cdots)$$

上式的意思是，对于任意给定的非负整数 t 与 s，都可以获得 $100x$ 型的合乎精度要求的日法 $A=8400t+1700s$。按此式获得的

三元数组[$t,s;A$]将很容易导出唐宋时期所有 100x 型之日法 A:

《王睿历》:[0,1;1700]; 《宣明历》:[1,0;8400];
《仪天历》:[1,1;10 100]; 《崇玄历》:[1,3;13 500];
《开禧历》:[1,5;16 900]; 《奉元历》:[1,9;23 700];
《会元历》:[4,3;38 700]; 《明天历》:[1,18;39 000]。

四、关于调日法的若干结论

1. 周琮等人关于调日法历史的记述应当可信

通过本节第二部分的实例分析可以看出,刘洪以后"率意加减,以造日法"之风已渐形成。《景初历》、《元嘉历》与第二部分所推诸历的日法朔余绝对不能认为是随机试验的产物,它们必然要依据某种算法推求而得。这就是著名的何承天调日法。由于古人没有代数符号可资利用,因此,调日法通常先以

$$\alpha x \equiv 17 \pmod{49}$$

推求 $A=\alpha x$,如果得解,则所取朔望月即为 H_1^m 型;如若无解,或所得解不合用,再考虑

$$\alpha x \equiv 2\times 17 \pmod{49}$$

依此类推。具体操作步骤如下:

令 $A=\alpha x=49m+17n$,给定条件

$$a<m/n<b$$

第一步,令 $n=1$,由 $\alpha x=49m+17$,若存在自然数 m,满足 $a<m<b$,使得

$$x=\frac{49m+17}{\alpha}$$

为整数,即得所求之日法 $A=\alpha x$。否则,令 $n=2$,由 $\alpha x=49m+17\times 2$,若存在自然数 m,满足 $a<m/2<b$,使得

$$x=\frac{49m+17\times 2}{\alpha}$$

为整数,即得所求之日法 $A=\alpha x$。否则,令 $n=3$,重复上述程序,直到求得合用之日法。

2. 并非所有日法都得自调日法

调日法作为一种推求历取朔望月常数的算法,主要是用来选择含有特殊因子的日法及高精度的、简单的历取朔望月常数。日法的特殊因子在一系列复杂的分数运算中,将起到化繁为简的作用。那些数额巨大的日法,通常是直接命取的,并非得自调日法。[18]另外,在唐宋期间,随着历家对一些非常好的日法的掌握愈来愈多,也很有可能按陈久金指出的那样,利用已知日法朔余的加成径直命取新历的朔望月常数。不过,严格地说,它与李锐调日法一样,都是通过分数的加成运算直接给出所求日法朔余。这一过程中,并不单独涉及对日法本身的调整选择,所以称其为"调日法",恐怕并不合适。但是,作为调日法的补充算法,它在古历中天文常数的选择方面得到应用,则应该给予肯定。

3. 李锐设计的调日法并非何承天算法

除了李继闵指出的漏洞之外,李锐之说也因其无法预知所得日法是否含有期望的因子,而很难认为是一例成功的考证。它与何承天调日法的旨趣似不相符。

4. 秦九韶调日法并非完整的调日法

调日法不能等同于"有日法,求强弱之数术",应是没有疑问的。秦九韶记述的调日法,如果放弃已知日法的前提,便可以成为何承天调日法选择以 100 为因子之日法的算法的后半部分。

5. 唐宋时期的调日法

唐宋时期历法中朔望月常数之分母(通常称为日法)大体为 $10x$ 与 $100x$ 之两种类型。对于 $A=100x$ 型之日法,若令对应之何

承天数 H_n^m 中强弱数之比为 $\theta = m/n$，则现存唐宋时期历法全部 8 种 $100x$ 型日法，恰好是由秦九韶《数书九章》中发展出来的一种算法，在取 $\theta = 17, 18, \cdots, 24$ 时，次递对应的结果（表 4-4）。笔者还构造了一种简易算法，用于调取数值在 0.530 588 ~ 0.530 595 之间的何承天数 H_n^m，以使其日法分别为 $A = 10x$ 或 $A = 100x$ 型。对于 $A = 10x$ 型之日法，可令

$$A = 49m + 17n = 850n + 490t$$

其中，$n = 1, 2, \cdots, 0 \leqslant t \leqslant 0.7n$；$m = 17n + 10t$。对于 $A = 100x$ 型之日法，可令

$$A = 49m + 17n = 8400t + 1700s$$

其中，$m = 169t + 34s$，$n = 7t + 2s$；t 与 s 为非负整数。凡满足上面两个算式之日法 A，所获相应之何承天数 H_n^m，必保证在 0.530 588 ~ 0.530 595 之间。唐宋历法中所有 $A = 10x$ 或 $A = 100x$ 之日法 A，全部可以由上面两个算式导出。

由于唐宋历法中之日法普遍含有因子 10 甚至 100，形式上与南北朝时期之日法有所不同，因此，可以利用 10 与 100 之特性，导出推求这种类型之合乎一定精度要求的日法的简易算法，虽然上面两个算式，未必肯定是当时历家"调日法"的一般算法，但表 4-4 的结果表明，此一时期的调日法，应当与南北朝的算法有所不同，确切地说，可以利用因子 10 与 100 的特性，将调日法的程序简化，这一点可以通过上面两个算式的构造获得旁证。

总之，唐宋时期历家对调日法的应用，足以证明当时的学者对分数加成性质的深刻认识，强弱数之比值 $\theta = m/n$ 与对应之何承天数 H_n^m 的映射关系已为唐宋历家所掌握，并用以选择简单合用的日法朔余，这一结论应当不必置疑。

第三节　渐近分数算法

我们知道，利用连分数展开，可以得到一系列的渐近分数。在

中国古代数学与历法史上，除了祖冲之的密率 $\pi=355/113$ 之外，还有许多常数都是所谓的渐近分数。因此，人们很自然会提出这样的问题：类似连分数展开之类的算法曾经为中国古代的数学家发明并使用过吗？

关于这个问题，华罗庚曾经推测，祖冲之的密率应当是连分数展开或与之相当的算法的产物。[19]吕子方在20世纪50年代通过对汉代历法五星会合周期常数的研究，提出当时人们已经使用了连分数算法。[20]20世纪80年代，李继闵更进一步指出汉历中所谓的“通其率”就是一种类似连分数的算法。[21]不过，笔者对汉代历法中所有五星会合周期常数的研究表明，这些数据的得出，其实根本不需要用到连分数算法。[22,23]

本节的目的，就是希望通过构造的一个定理，对中国古代历法家为了选择新的闰周而设计的一种算法进行分析讨论，其结果将证实，在南北朝的刘宋时期，已经出现了一种与连分数展开相当的算法。进而根据具体的演算推断，祖冲之当年可能就是利用这种方法，推导出他的密率 $\pi=355/113$。

一、祖冲之的圆周率

祖冲之(429～500)一生在数学、天文、历法与工程技术等方面都有很大的成就，可惜的是，他的研究工作除了《大明历》完整地保存下来之外，其余的大部分都已经失传了。作为数学家的祖冲之，曾经撰写了一本名为《缀术》的数学专著，在唐代初期被选作当时国子监算学馆的教材之一，收录在李淳风等人奉敕编辑的《算经十书》中刊刻发行。据说《缀术》的内容十分艰深，习者寥寥，因此，在北宋元丰七年(1084)秘书省重新刊刻《算经十书》时，它已经失传。

祖冲之在数学上的贡献，最为人称道者，是他关于圆周率的计算，《隋书》中记录了他所得到的圆周率的一些结果，遗憾的是，他

推求这些数据的方法都没有流传下来。在《隋书》中记录的这些结果中,特别引人注目的就是所谓的密率 $\pi=355/113$。

圆周率历来被数学史家认为是衡量一个民族古典数学文明之发达的尺度。中国古代在很早的时候使用的是周三径一的圆周率。大约汉代的时候,人们发现圆周率实际上可能并不是常数3,于是开始给出不同的数值。到了三国,数学家刘徽在注释《九章算术》时,发明割圆术,从此开辟了中国数学家计算圆周率的新时代。

通常圆周率的近似值可以用十进小数或有理数两种形式表示。在刘徽注释《九章算术》时,人们发现了圆周率的这样两种近似值,它们分别为3.1416与157/50。这个结果在当时是相当精确的。到了南北朝刘宋时期,通过祖冲之的努力,圆周率的精度有了很大提高。据《隋书律历志》记载:

> 古之九数,圆周率三,圆径率一,其术疏舛。自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒,各设新率,未臻折衷。宋末,南徐州从事史祖冲之更开密法,以圆径一亿为一丈,圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽,朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽。正数在盈朒二限之间。密率:圆径一百一十三,圆周三百五十五。约率:圆径七,周二十二。①

由上述引文可知,祖冲之借助割圆术得到圆周率的数值范围在3.141 592 6与3.141 592 7之间,这个结果使得祖冲之的圆周率精度达到7位小数。另外祖冲之还得到了两个圆周率的有理数近似值,他分别称之为约率与密率:22/7与355/113。这两个分数也是相当了不起的成果,尤其是后者,被人称为祖率,其重要性甚至比祖冲之的盈朒二数更加引人注目。

祖冲之的约率与密率为什么值得大家的重视呢?当我们将圆周率按连分数展开时,可以知道,圆周率 π 的前几个渐近分数依

①隋书律历志(卷16).历代天文律历等志汇编(6).1859。

次为

$$\frac{3}{1},\frac{22}{7},\frac{333}{106},\frac{355}{113},\frac{103\,993}{33\,102},\cdots$$

祖冲之的约率与密率都是圆周率 π 的渐近分数。更进一步的分析表明,在分母小于 16 604 的一切有理数中,祖率 355/113 是最接近圆周率 π 的分数。祖率 $\pi=355/113$,在西方被称为"安东尼兹率",安东尼兹(A. Anthoniszoon,1527 ~ 1607)是荷兰的数学家,据说他在 1585 年利用阿基米德的割圆术求得

$$\frac{333}{106}<\pi<\frac{377}{120}$$

然后取这两个分数的加成,得到其圆周率[24]

$$\pi=\frac{333+377}{106+120}=\frac{355}{113}$$

祖冲之如何得到他的圆周率,史书中并无详细的交代。不过,根据笔者的研究,祖冲之的盈朒二数,应该是利用类似刘徽割圆术的方法,取直径为一丈之圆,在割圆至圆内接 24 576 边形时,得到此数。① 相较盈朒二数,祖冲之的约率与密率是如何得到的,就不是那么清楚了。近代数学史家为此提出了许多的猜测,不过,迄无定论。

二、闰周算法与渐近分数

1. 选择闰周的算法

闰周是早期历法中一个常见的常数,它给出了回归年 t 与朔望月 u 的最小公倍数关系。假设有一对正整数 (p,q),使得

$$pu=qt$$

①有关祖冲之盈朒二限的讨论,参见拙作"刘徽割圆术的数学原理",见:吴文俊主编.刘徽研究.西安:陕西教育出版社,1993.170 ~ 192。

于是,我们就称整数(p,q)是这个回归年与朔望月常数的一个闰周。由于一个正常的历年含12个历月,因此,在q个回归年中将恰好有$p-12q$个闰月。

早期的中国历法选择的闰周都是19年7闰,也就是19个回归年等于235个朔望月。公元4世纪末期,历法家已经认识到这个闰周是有问题的,导致的结果是置闰太多,因此,412年,北凉的赵𣋡就在其《元始历》中选择了新的闰周。463年,祖冲之在其《大明历》中又给出了一个闰周。在唐代傅仁均的《戊寅元历》之前,共有16部历法使用了10种不同的新闰周。有意思的是,这些闰周都可以用如下的公式表示出来

$$\frac{p}{q}=\frac{136+235m}{11+19m}$$

其中的136/11是古老的11年4闰制闰周。如果我们将回归年t与朔望月u的比值t/u按连分数展开,可以发现,136/11与235/19正好是它的两个相邻的渐近分数(表4-5)。

表4-5 中国古代历法中的闰周

序号	m	p	q	$p-12q$	采用的历法(公元纪年)
0		235	19	7	太初历(-104);四分历(85);乾象历(206);黄初历(220);景初历(237);永和历(352);太始历(365);三纪历(384);元嘉历(443)
1	20	4836	391	144	大明历(463);天和历(566)
2	21	5071	410	151	大业历(608)
3	22	5306	429	158	开皇历(584)
4	23	5541	448	165	大象历(579)
5	26	6246	505	186	正光历(522);九宫历(547)
6	29	6951	562	207	兴和历(540)
7	31	7421	600	221	元始历(412)
8	32	7656	619	228	大同历(544);武平历(576);孟宾历(576)
9	34	8126	657	242	甲寅元历(576)
10	35	8361	676	249	天保历(550);皇极历(604);戊寅元历(618)

闰周制虽然在唐代初期即已废除，但在开元年间出现的一部太乙术数的历法中可以发现，当时的太乙历法家仍然试图为其历法挑选一个合适的闰周。在这部与僧一行的《大衍历》同时代的历法中，作者王希明是参考《大衍历》的常数来选取其基本常数的。通过对《开元太乙历》之基本常数的分析，我们可以看到古人是如何选择其历法中的闰周的。[25] 由《大衍历》，已知其回归年常数$t=1\ 110\ 343/3040$，朔望月常数$u=89\ 773/3040$，令

$$\frac{t}{u}=\frac{1\ 110\ 343}{89\ 773}=\frac{136+235x}{11+19x}$$

则可以解得$x=33.7$，因此，取$m=34$，立刻得到《开元太乙历》的闰周如下

$$\frac{p}{q}=\frac{136+235\times34}{11+19\times34}=\frac{8126}{657}$$

根据这个算法，如果假设祖冲之选择的回归年的观测值为$t=365.2430$日，朔望月的观测值为$u=29.5306$日，令

$$\frac{t}{u}=\frac{365.2430}{29.5306}=\frac{136+235x}{11+19x}$$

解得$x=20.42$，取$m=20$，于是，立刻得到祖冲之《大明历》中的闰周

$$\frac{p}{q}=\frac{136+235\times20}{11+19\times20}=\frac{4836}{391}$$

2. 闰周算法的数学意义

现在让我们总结一下前面叙述的闰周算法：假设θ是所需逼近的一个正实数，选择两个非负有理数：$\frac{a_1}{b_1}$与$\frac{a_2}{b_2}$，使得θ介于$\frac{a_1}{b_1}$与$\frac{a_2}{b_2}$之间，且

$$|a_1b_2-b_1a_2|=1$$

如果$\frac{a_2}{b_2}$比$\frac{a_1}{b_1}$更接近实数 θ,则令

$$\theta=\frac{a_1+a_2x}{b_1+b_2x}$$

由此可以解得

$$x=\frac{a_1-b_1\theta}{b_2\theta-a_2}$$

令 $x\approx m$,m 表示实数 x 的一个近似整数,然后将 m 代回上式,便可以得到实数 θ 的一个近似分数

$$\theta\approx\frac{p}{q}=\frac{a_1+a_2m}{b_1+b_2m}$$

那么,这样求得的近似分数到底好不好呢? 下面的定理可以圆满地回答这个问题。

定理 1　对于任意的正实数 x,及非负整数 a_1,a_2,b_1,b_2,如果 $|a_1b_2-b_1a_2|=1$,定义函数

$$f(m)=\frac{a_1+a_2m}{b_1+b_2m}$$

及 $m=[x]$,m 表示 x 的整数部分,则有

(1) 如果 $f(m)$ 存在,则 $f(m)$ 是 $f(x)$ 的一个渐近分数。

(2) 如果 $1/2\leqslant x-m<1$,则 $f(m+1)$ 是 $f(x)$ 的一个渐近分数。

笔者构造的这个定理,可以从哈代的《数论导引》第 10 章第 10 节之定理 172 推导出来。[26] 哈代的定理 172 称,如果

$$x=\frac{P\zeta+R}{Q\zeta+S}$$

其中,$\zeta>1$,P、Q、R、S 为整数,并且满足

$$Q>S>0,PS-QR=\pm1$$

则 R/S 与 P/Q 是 x 的两个相邻的渐近分数。

定理 1 可以说明这样一个问题:反复地使用闰周算法,就能够求得所逼近实数的渐近分数列。因此,它事实上已经解释了为什

么中国古代数学家与历法家可以算出那样多的渐近分数的现象。

3. 祖冲之如何推算出他的密率

现在让我们根据闰周算法，看一看祖冲之是如何得到他的圆周率 $\pi = 355/113$ 的。

第一步，假定 $3 < \pi < 7/2$，令 $\pi = 3.14$，因为 3 更接近 $\pi = 3.14$，所以，令 $\pi = \dfrac{7+3x}{2+x}$，解之即得 $x = 5.1$。于是，取 $m = 5$，则有

$$\pi = \frac{7+3\times5}{2+1\times5} = \frac{22}{7}$$

这就是祖冲之的约率。

第二步，已知 $3 < \pi < 22/7$，令 $\pi = 3.1416$，因为 22/7 更接近 $\pi = 3.1416$，所以，令 $\pi = \dfrac{3+22x}{1+7x}$，解之即得 $x = 16.1$。于是，取 $m = 16$，则有

$$\pi = \frac{3+22\times16}{1+7\times16} = \frac{355}{113}$$

这就是祖冲之的密率。

由上述演算可以看出，根据闰周算法，为了得到祖冲之的密率，我们需要知道的东西只有两个：其一，$\pi = 3.1416$，这个数据在刘徽作割圆术的时候已经得到；其二，$3 < \pi < 22/7$，这个结果通过第一步的简单计算，祖冲之也已经得到。由此可见，按照闰周算法，得到祖冲之的这个密率似乎并不难。

中国古代历法家发明的选择闰周的算法，实际上是一种简单的、有效的实数有理逼近算法。根据闰周算法，可以很容易地计算出所逼近实数的一系列渐近分数。这就是中国古代数学与历法中不断出现大量的渐近分数的原因所在。

从某种意义上讲，中国古代的闰周算法与连分数算法是等价的。这个方法大约与所谓的何承天调日法同时产生，应该是公元 5 世纪初的一项成就。闰周算法曾经被用来选择其他一些历法常

数，如平气长度、交食周期等，应该是不成问题的。祖冲之用它来选择其圆周率的约率与密率，应该也是真相大白的时候了吧。

三、交食周期与连分数算法

在中国传统数学与数理天文学中，以有理数逼近实数的事例不胜枚举。中国古代历法中众多的天文常数几乎皆以非十进分数表示，一些精度极高的简单分数早已引起天算史学者的广泛关注。有关中国古代的实数有理逼近的算法与理论的探讨多年来未曾间断，除了史有所记的“调日法”之外，华罗庚、吕子方与李继闵等更推断中国古代曾出现过与连分数展开相当的算法（见文献[19～21]）。在下面的讨论中，我们试图通过对唐宋历法中交食周期常数之选择算法的探原，为“连分数算法说”提供一些新的证据。

1. 历法中的交食周期

众所周知，当日月同时运行至同一个黄白交点附近会合时，便会发生日食。要想准确地推求日食，就需掌握良好的朔望月与交点月或交点年等天文常数。交食周期就是人们给出这些常数间的一种简单的数学关系，设有一组整数：m,n,l，使

$$m\text{ 交点月} = n\text{ 朔望月} = l\text{ 交点年}$$

其中，$l=m-n$。天文学史上很有名的沙罗周期（Saros）即是古巴比伦人发现的一个交食周期

$$223\text{ 个朔望月} = 19\text{ 个食年}(n/l = 223/19)$$

中国古代早期的历法通常以半个食年（太阳从一个黄白交点运行至另一交点的时间）给出其交食周期，称为一会积日。例如，汉代的《三统历》即取

$$135\text{ 个朔望月} = 23\text{ 个一会积日}(n/l = 270/23)$$

但是，由于这些天文常数之间不可通约，所以，交食周期均不过是对它们之间比值的某种有理逼近的结果。换句话说，在历法

推算愈来愈准确的情形下,交食周期总不如直接运用交点月等常数在日月食推求中更精确。因此,唐代之后,中国历法在日月食计算中一律不再使用交食周期预推其发生时刻。

然而,有趣的是,绝大多数唐宋历法中仍然可以发现一些不同的交食周期,历法家们称其为:交率 $=l$,交数 $=m$。它们用于如下算式中

$$入交定日 = 入交常日 + 太阳改正 + (l/m) \times 月亮改正$$

其中,入交定日与入交常日分别表示定朔望与平朔望时刻月亮距离黄白交点的运行时间。有关这个算式的数理分析与几何解释,薮内清与刘金沂分别做过精辟的论述。[27,28]我们感兴趣的仅仅是,这些历法中的"交率/交数 $=l/m$"是如何得来的?

因为,交率/交数 $=l/m$,而唐宋历法中均不列出交点年数据,假设 u 与 w 分别为历取朔望月与交点月常数,令 $n=m-l$,我们可依

$$mw = nu$$

来探讨这些交食周期与历取朔望月 u、交点月 w 常数的关系。

2. 唐宋历法交食周期分析

从唐代李淳风的《麟德历》至元代郭守敬的《授时历》,基本上保存下来的历法共 23 部,其中有 16 部于步交会章中给出一交食周期,其余 7 部情形如次:《钦天历》近似以月亮日行速 13.375 表示 m/l;《应天历》①与《明天历》②,未计算入交定日,而是以另一种算法步之;《开禧历》与《成天历》未载有关术文与数据;《重修大明历》(1180)与《庚午元历》,则以 $m/l=12.7$ 近似计算。③

①宋史律历志(卷69).中华书局编.历代天文律历等志汇编(8).北京:中华书局,1976.2488~2489。

②宋史律历志(卷75).中华书局编.历代天文律历等志汇编(8).北京:中华书局,1976,2669~2670。

③元史历志(卷57).中华书局编.历代天文律历等志汇编(9).北京:中华书局,1976.3494。

16 部给出交食周期的历法的基本数据如表 4-6 所示，我们的目的主要是探讨这些历法中之 m/n 与连分数算法之关系。在此之前，必须先明确一下 m/n 与 u/w 之关系。

由表 4-6 可见，$\Delta = |u/w - m/n|$ 大致在 10^{-7} 左右，如此逼近的程度，表明 m/n 与 u/w 必有一定联系。假定 u/w 系据 m/n 推导而来，则因为朔望月 u 为基本历取常数，而必然导得历取交点月 $w = nu/m$ 的结论。

表 4-6　唐宋历法交食周期常数

历名	u/w	l	m	n	Δ
麟德历	39 571/36 464(113/300)	61	777	716	5.9×10^{-7}
大衍历	89 773/82 725.1322	343	4369	4026	1.3×10^{-8}
五纪历	39 571/36 464.3767	61	777	716	5.9×10^{-7}
正元历	32 336/29 797.3815	61	777	716	4.9×10^{-7}
宣明历	248 057/228 582.6512	202	2573	2371	2.6×10^{-8}
崇玄历	398 663/367 364.9673	263	3350	3087	3.5×10^{-8}
乾元历	86 820/80 003.9455	142	1809	1667	1.4×10^{-5}
仪天历	298 259/274 843.2279	45	573	528	3.0×10^{-5}
崇天历	312 729/288 177.4277	141	1796	1655	3.5×10^{-7}
观天历	355 253/327 362.9944	183	2331	2148	3.8×10^{-6}
纪元历	215 278/198 377.0880	324	4127	3803	1.1×10^{-8}
统元历	204 647/188 580.6457	42	535	493	3.5×10^{-6}
乾道历	885 917.76/816 366.6034	80	1019	939	1.0×10^{-6}
淳熙历	166 552.56/153 476.9543	61	777	716	3.6×10^{-7}
会元历	1 142 834/1 053 113.2140	507	6458	5951	3.0×10^{-10}
统天历	354 368/326 547	19	242	223	4.3×10^{-6}

注：《乾元历》$\frac{u}{w}\approx\frac{86\ 820}{80\ 004}=\frac{1808.75}{1666.75}\approx\frac{1809}{1667}$，原文将 1809 误为 1802；《观天历》原文 w 误为 327 361.9944，其交食周期 $l:m:n=61:777:716$；$\Delta=\left|\frac{u}{w}-\frac{m}{n}\right|$。

但事实上，自从祖冲之《大明历》首次给出交点月常数 w 以来，历家所取 w 基本上在 27.212 22 ~ 27.212 23 日之间，精度已达

10^{-5}，且十分稳定。与此相类，中国古代历法家的朔望月 u 取值在 29.530 59～29.530 60 之间，精度亦达 10^{-5}，历法家认为在此范围内调取的朔望月 u 皆合要求。[3]

因此，历法家在调取其交点月 w 时，完全有理由以 27.212 22 为参照值进行附会既定上元时的选择推算，实无必要刻意追求某个新的 m/n 来推导历取交点月常数 w。换言之，u/w 的选择根本无需参考交食周期 m/n。

实际上，以《统天历》为例，$nu/m = 326\,545.7/12\,000 \neq w$，由于《统天历》交点月不从统天上元起算，因而其历取交点月常数 w 无需调整（即 w 的分子取整数，无余分），所以，该历 w 显然不是 nu/m 导出的结果。

另外，设若各历交点月参照值系依 nu/m 推定，无妨取 $u = 29.530\,595$，则有些历法的 w 参照值将十分粗疏，例如

《仪天历》：$528u/573 = 27.211\,438$

《统元历》：$493u/535 = 27.212\,305$

这样粗劣的数据根本不具备作交点月 w 的参照值的资格。由此可见，历取交点月 w 的调取完全没有必要参照某个预先推定的交食周期 m/n。况且唐宋历法家已不再使用交食周期来推算日月食发生之期，作为月亮改正项的系数 l/m，人们对它的精度要求不必很高。因此，也就不太可能在导得交点月 w 之前，独立选择一个新的交食周期 m/n。因为，事实上，欲获得一个好的交食周期亦并非一件简单的事，例如，表 4-6 有多部历法取 $m/n = 777/716$，此即有名的纽康（Newcomb）周期，设若此数得之极易，也就不显得有什么珍贵了。

综上所述，我们认为唐宋历法中的交食周期基本上不应是先于 u/w 而预为推定的常数。

3. 交食周期与渐近分数

如果说，表 4-6 中之交食周期 m/n 系据历取值 u/w 导出的结

果,则最容易想到的算法即所谓的“调日法”。此法据文献记载为南北朝刘宋时期的何承天(370～447)所创,其大意是说,假定已知某实数 θ 满足

$$\frac{a_1}{b_1} > \theta > \frac{a_2}{b_2}$$

称$\frac{a_1}{b_1}$为强率,$\frac{a_2}{b_2}$为弱率,于是可令

$$\frac{m}{n} = \frac{a_1 x + a_2 y}{b_1 x + b_2 y}$$

其中,x、y 分别称为强、弱数,不断调整正整数 x, y,使 m/n 与已知实数 θ 相逼近。调日法作为中算家发明的一种有效的数值逼近算法,曾广泛地用于朔望月、近点月及闰周等古代历法天文常数的选择上。因此,有人推测,中国古代诸多交食周期 m/n 亦可能出自这种算法。

不过,按上述思想调取交食周期,将会遇到如下矛盾:其一,找不出合适的、史有明据的强、弱二率$\frac{a_1}{b_1}$与$\frac{a_2}{b_2}$,既令取东汉王充的周期$\frac{a_1}{b_1} = \frac{89}{82}$、《三统历》的周期$\frac{a_2}{b_2} = \frac{293}{270}$,按

$$\frac{m}{n} = \frac{89x + 293y}{82x + 270y} \tag{4-12}$$

则有《会元历》周期

$$\frac{m}{n} = \frac{89 \times 17 + 293 \times 83}{82 \times 17 + 270 \times 83} = \frac{6458}{5951}$$

强数与弱数 x、y 分别为 17 与 83,计算量之大,不难想像;其二,由表 4-6 知,各历 Δ 皆十分小,若按式(4-12)不断调整 x、y 与 u/w 进行比较,则通常应使 u/w 计算至小数点后 8 位数以上,考虑到唐宋元历法中的朔望月 u 与交点月 w 历取值不过精确至 10^{-5},因此,要求 u/w 算至 8 位小数之上显然有悖常理。因此,总体上来说,历法家不会以式(4-12)或类似的算式调取其交食周期 m/n。

在我们将表 4-6 中的 u/w 按连分数展开时，发现其中 16 部历法中的 10 部历取周期 m/n 为 u/w 的渐近分数，为了进一步分析探讨 m/n 与 u/w 连分数展式的数理关系，假令 $[a_0;a_1,\cdots,a_k]$ 表示有理数 $m/n=\varphi_k$ 的连分数展式，我们引入了如下定理：

定理 2　当 $a_k>1$ 时，令 $\varphi_k=[a_0;a_1,\cdots,a_k]$，$\varphi_{k+1}=[a_0;a_1,\cdots,a_k,1]$，则实数 θ 以 φ_k 为其渐近分数的充要条件为：θ 介于 φ_k 与 φ_{k+1} 之间。

由于有限连分数展式有且仅有两种不同的形式，即令 $a_k>1$ 时，有

$$[a_0;a_1,\cdots,a_k]=[a_0;a_1,\cdots,a_k-1,1]=m/n$$

因为，如果 $\theta_1=[a_0;a_1,\cdots,a_k,a_{k+1},\cdots]$，而 $\theta_2=[a_0;a_1,\cdots,a_k-1,1,\cdots]$，虽然 $\theta_1\neq\theta_2$，但它们皆以 m/n 为其渐近分数之一。定理 2 中 $a_k>1$ 的限定，就是为了保证 m/n 的连分数展式唯一。定理 2 是定理 5 的一个推论（见第四节）。由于定理 2 限定 $a_k>1$，因此用起来有些不便，不过可以利用它，获得更具体的刻划性定理。

设 $m/n=[a_0;a_1,\cdots,a_{k-1},a_k]$，$m_0/n_0=[a_0;a_1,\cdots,a_{k-1}]$，$a_k>1$，则

$$(m-m_0)/(n-n_0)=[a_0;a_1,\cdots,a_{k-1},a_k-1]$$

因为 $a_k>1$，所以 $n>2n_0$，$m>2m_0$，且 m/n 介于 m_0/n_0 与 $(m-m_0)/(n-n_0)$ 之间。于是，由定理 2 可证：

(1) 当 $\frac{m-m_0}{n-n_0}>\frac{m}{n}>\frac{m_0}{n_0}$ 时，θ 以 m/n 为其渐近分数的充要条件为

$$(2m-m_0)/(2n-n_0)>\theta>m/n$$

或

$$m/n>\theta>(m+m_0)/(n+n_0)$$

因为 $mn_0-m_0n=1$，所以有

$$\frac{1}{n(2n-n_0)}>\theta-\frac{m}{n}>\frac{-1}{n(n+n_0)}$$

(2) 当 $\frac{m_0}{n_0}>\frac{m}{n}>\frac{m-m_0}{n-n_0}$ 时，θ 以 m/n 为其渐近分数的充要条

件为

$$(m+m_0)/(n+n_0)>\theta>m/n$$

或

$$m/n>\theta>(2m-m_0)/(2n-n_0)$$

因为 $mn_0-m_0n=-1$，所以有

$$\frac{1}{n(n+n_0)}>\theta-\frac{m}{n}>\frac{-1}{n(2n-n_0)}$$

综合上述结果，令 $m/n=[a_0;a_1,\cdots,a_{k-1},a_k]$，$m_0/n_0=[a_0;a_1,\cdots,a_{k-1}]$，$a_k>1$，则有

定理 3　（必要条件）若 $\left|\theta-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{n(2n-n_0)}$，则实数 θ 必以 m/n 为其渐近分数之一；（充分条件）若实数 θ 以 m/n 为其渐近分数之一，则必有 $\left|\theta-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{n(n+n_0)}$。

比较表 4-6 与表 4-7，可以发现，共有 11 部历法满足

$$\Delta<\frac{1}{n(2n-n_0)}$$

按定理 3 知，其 m/n 必为 u/w 的渐近分数之一，表 4-7 中列出的 u/w 与 m/n 之连分数展式，证实了这一结果。另外，由于《乾元历》、《仪天历》、《崇天历》、《统元历》与《乾道历》5 历满足

$$\Delta>\frac{1}{n(n+n_0)}$$

表 4-7　唐宋历法交食周期与连分数展式

历名	$\frac{u}{w}$的连分数	$\frac{m}{n}$的连分数	$\frac{m_0}{n_0}$	$\frac{1}{n(2n-n_0)}$	$\frac{1}{n(n+n_0)}$
麟德	4,3,3,93…	4,3	242/223	1.2×10^{-6}	
大衍	4,3,2,1,1,3…	4,3,2,2	1796/1655	3.9×10^{-8}	
五纪	4,3,3,61…	4,3	242/223	1.2×10^{-6}	
正元	4,3,3,1…	4,3	242/223	1.2×10^{-6}	
宣明	4,3,3,6,3…	4,3,3	777/716	1.0×10^{-7}	

续表

历名	$\frac{u}{w}$的连分数	$\frac{m}{n}$的连分数	$\frac{m_0}{n_0}$	$\frac{1}{n(2n-n_0)}$	$\frac{1}{n(n+n_0)}$
崇玄	4,3,3,1,2,5…	4,3,4	777/716	5.9×10^{-8}	
乾元	4,3,1,1,21…	5,6	293/270		3.1×10^{-7}
仪天	4,3,1,5,3…	3	51/47		2.5×10^{-5}
崇天	4,3,3,1,1…	4,3,2	777/716		2.5×10^{-7}
观天	4,3,4,5…	4,3	242/223	1.2×10^{-6}	
纪元	4,3,5,6,5…	4,3,5	777/716	3.8×10^{-8}	
统元	4,3,2,1,1…	4,2	242/223		2.8×10^{-6}
乾道	4,3,3,1,70…	4,4	242/223		9.2×10^{-7}
淳熙	4,3,5,8…	4,3	242/223	1.2×10^{-6}	
会元	4,3,8,87…	4,3,8	777/716	1.5×10^{-8}	
统天	4,4,1…	4	51/47	1.1×10^{-5}	

注:仪天历$\frac{m}{n}=\frac{573}{528}\approx\frac{191}{176}$;观天历$\frac{m}{n}=\frac{2331}{2148}=\frac{777}{716}$。表中$\frac{u}{w}$与$\frac{m}{n}$的连分数展式均从第6项开始。它们的前5项都是1,11,1,2,1。

因此,由定理3知,其 m/n 必不为 u/w 的渐近分数。由表4-6可知,这些历法的 Δ 差不多皆是表4-6中16部历法中的较大者,它们的交食周期 m/n 均较粗糙,皆非连分数算法的产物。其中,《乾元历》之 m/n 系 u/w 约分而得之近似分数;《仪天历》$\frac{m}{n}=\frac{573}{528}=\frac{191}{176}$,尚不知从何而来;《乾道历》$\frac{m}{n}=\frac{1019}{939}$就是何承天《元嘉历》曾经用过的交食周期。

《崇天历》$\frac{m}{n}=\frac{1019+777}{939+716}$,《统元历》$\frac{m}{n}=\frac{293+777}{270+716}$,可能皆是利用前代历法中的交食周期加成而得的结果。与此相类,《观天历》$\frac{m}{n}=\frac{2331}{2148}=\frac{4369+293}{4026+270}$,可能是《大衍历》与《三统历》交食周期

加成的结果,因为按连分数展开,所获之渐近分数应为一既约分数,而《观天历》交食周期则不是。

这种加成算法,可以说是调日法的一种应用。[14] 不过,如果推而广之认为其余 10 部历法之交食周期 m/n 全部是照此加成算法导出的结果,则显然不太可能。以《大衍历》、《宣明历》、《崇玄历》、《纪元历》及《会元历》5 历为例,查表 4-7 可知,其交食周期 m/n 几乎均仅仅是各自历取值 u/w 的渐近分数,这一点绝非巧合。据定理 3,欲令这些历法的 m/n 为其 u/w 的一个渐近分数,则必使 u/w 展至 8 位小数以上($\Delta < 10^{-7}$),前文已述,这是不太可能的。况且,即使历法家将 u/w 计算至 8 位小数以上,则仍需进行数次乃至数十次的加成运算,且每次加成均需将其计算至 8 位小数以上同 u/w 进行比较,运算量之巨实在是不胜其烦。因此,按调日法依式(4-12)或其他方式的加成算法以取得 u/w 的渐近分数 m/n,几乎可以说是不切实际的。

那么,这些取 u/w 的渐近分数为其交食周期 m/n 的历法,所获 m/n 究竟有多么好呢?为此,我们引入如下定理:

定理 4 令 $m/n = [a_0; a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k]$, $m_1/n_1 = [a_0; a_1, \cdots, a_{k-1}]$,实数 $\theta_1 = [a_0; a_1, \cdots, a_k, \cdots]$,对于任意给定的自然数 p、q,当 $q < an + n_1$ 时$\left[a = \left(\frac{1}{2n^2|\theta - m/n|} - \frac{n_1}{n}\right) + 1\right]$,必有

$$|\theta - p/q| > |\theta - m/n|$$

定理 4 的证明比较简单,实际上令 $\frac{p}{q} = \frac{am + m_1}{an + n_1}$,则欲令

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{m}{n}\right| < 2\left|\theta - \frac{m}{n}\right|$$

立得

$$a > \frac{1}{2n^2|\theta - m/n|} - \frac{n_1}{n}$$

通过表 4-8 可以看出,在分母小于 268 511 的一切有理数中,没有比 $m/n = 6458/5951$ 更接近《会元历》的 u/w。与祖冲之圆周

率 $\pi=355/113$ 相比较，在分母小于 16 604 的一切有理数中，355/113 是 π 的最佳分数。由此可见，这些历法中所取得的交食周期 m/n，多是 u/w 的一个极好的渐近分数。对它的选择必定是设计了某种巧妙的算法。

表 4-8　交食周期的逼近度分析

历名	m/n	m_1/n_1	a	p/q	Δ
大衍历	4369/4026	2573/2371	2	11 311/10 423	1.3×10^{-8}
宣明历	2573/2371	777/716	4	11 069/10 200	2.6×10^{-8}
崇玄历	3350/3087	2573/2371	1	5923/5458	3.5×10^{-8}
纪元历	4127/3803	777/716	4	17 285/15 928	1.1×10^{-8}
会元历	6458/5951	777/716	45	291 387/268 511	3.0×10^{-10}
π	355/113	333/106	146	52 163/16 604	2.7×10^{-7}

注：m/n、m_1/n_1 为 u/w 之相邻的两个渐近分数，$\Delta=|u/w-m/n|$，$p/q=(am+m_1)/(an+n_1)$，$a=\left(\frac{1}{2n^2\Delta}-\frac{n_1}{n}\right)+1$。

四、相邻的渐近分数

我们知道，实数的有理逼近算法有很多种，其中最基本的一种算法就是按连分数展开以求取被逼近实数的渐近分数。根据以上的讨论可以看出，中国古代数理天文学中选择闰周的算法，实际上就是与连分数展开相等价的一种算法。寻求新的闰周的努力，是从公元 5 世纪初开始的。此时，何承天为了给《元嘉历》挑选适当的历取朔望月常数，发明了所谓的“调日法”。日法，通常是指历法中各个常数的公分母，有时候专指历取朔望月常数的分母。调日法，就是通过选择特别的自然数为日法，以确定历法所应用的朔望月常数。

调日法在某种程度上，与闰周算法相关。因此，调日法与闰周

算法几乎同时出现，是不奇怪的，而中国古代数学家反复利用这个算法以推求一些历法中的常数，也是顺理成章的事情了。这个推论可以说明中国古代数理天文学中，为何不断地出现可以称为是渐近分数的常数。特别是，为了利用闰周算法或调日法算法，都需要事先确定一个所谓的"强率"与"弱率"，而这两个数据，又大体上都是所逼近实数的相邻的渐近分数。

1. 调日法中的强率与弱率

何承天调日法中确定的强率(26/49)与弱率(9/17)就是朔望月常数的两个相邻的渐近分数。这个情况说明，中国古代的数学家在选择这类强率与弱率时，是有目的，有意识的，当然也应该是有一定的方法的，这样的方法可以保证他们得到这些渐近分数。宋代著名的历算家周琮在其《明天历议》中谈到以前的历法家选择其近点月常数时说道：

> 旧历课转分，以九分之五为强率，一百一分之五十六为弱率，乃于强弱之际而求秒焉。[1]

根据上述文字，可以知道，在《明天历》(1064)之前，人们发现近点月常数的余数小于5/9日，大于56/101日，并且以这两个分数为强、弱二率，按照何承天设计的调日法算法来推算其历法中所选择的近点月常数。由于中国古代历法基本上取近点月值为27.5545日，因此，当我们将0.5545按连分数展开时，就不难发现，它们竟然是两个相邻的渐近分数！

那么，这两个数据是如何得到的呢？按照前述闰周算法，假定历法家取近点月的余数为27.5545日，则不难断定$1/2<0.5545<2/3$，因为1/2更接近0.5545，所以，令

$$0.5545=\frac{2+x}{3+2x}$$

---

①宋史律历志(卷74). 历代天文律历等志汇编(8). 2639。

解之即得 $x=3.09$，取 $m=3$，则有

$$\frac{2+3}{3+2\times3}=\frac{5}{9}$$

这就是周琮所说的近点月常数之强率。又因为 $1/2<0.5545<5/9$，而 5/9 更接近 0.5545，所以，令

$$0.5545=\frac{1+5x}{2+9x}$$

解之即得 $x=11.47$，取 $m=11$，则有

$$\frac{1+5\times11}{2+9\times11}=\frac{56}{101}$$

这就是周琮所说的近点月常数的弱率。类似近点月这样的两个相邻渐近分数的情况在中国古代历法中还有多例，可以罗列如表 4-9。

表 4-9　中国古代历法中的相邻的渐近分数

常数	名称	强率	弱率
朔望月余数	朔余/日法	26/49	9/17
近点月余数	转余/日法	5/9	56/101
平气	除法/乘法	487/32	1324/87
闰周	章月/章岁	235/19	136/11
交食周期	交率/交数	242/223	777/716

早期的中国历法，使用交食周期推算日月食。唐代以后，直接用交点月计算，交食周期不再直接用于这样的计算。但在计算合朔时刻月亮距离黄白道交点的时间时，多数历法都给出了一个交食周期

$$m\text{ 个交点月}=n\text{ 个朔望月}$$

历史上比较有名的交食周期如沙罗(Saros)周期 $m/n=242/223$，在宋代的《统天历》(1199)中为杨忠辅所采用。另一个有名的纽康(Newcomb)周期 $m/n=777/716$，曾经为李淳风在其《麟德历》(664)中采用。

当我们以唐宋时期历法中所选择的朔望月与交点月常数的比值 u/w 按连分数展开时，可以发现，所谓的沙罗周期与纽康周期 m/n，正好是其两个相邻的渐近分数。由表 4-7 可知，除《统天历》外，其余 15 部历法的 u/w 的连分数展式中，皆以沙罗周期 $m/n = 242/223$ 与纽康周期 $m/n = 777/716$ 为相邻的两个渐近分数。因此，唐宋历法中有多部采用 777/716 为其交食周期并非偶然。

2. 唐宋历法中的"乘法"与"除法"

根据前面的讨论可以知道，相邻两个渐近分数的同时出现，在中国古代历法中尚有多例，例如，按照调日法，对于朔望月、近点月、闰周、交食周期等常数的选择，其中的强率与弱率都构成一对相邻的渐近分数。非常有意思的是，在唐宋历法中我们还发现了另一类常数亦与渐近分数相关。

我们知道，24 气是中国历法中一个很重要的概念，若以 24 等分一个回归年，得数为一个平气的长度。设 t 表示一个回归年的长度，1 气 $= t/24$。由于 24 气的长度在历法中多处用到，而 $t/24$ 通常取数较繁，因此，唐代《崇玄历》便以 7305/480 近似地表示一个平气长度，并称 480 为乘法，7305 为除法。[①] 按此数系据《四分历》回归年而来：$365.25/4 = 7305/480 = 487/32$，约分所得结果后为宋代《崇天历》采用。

在唐宋时期的许多历法中，都采用平气将回归年划分为 24 段，然后在构造分段二次插值函数时以一个简单的分数近似代替平气的长度。这个分数的分子与分母分别称为"除法"与"乘法"。

在这个时期，共有 11 部历法给出除法 m/乘法 n，以近似表示其平气的长度。这些分数系据其历取回归年 t 约化而来，应当没有问题。当我们以连分数展开 $t/24$ 时，便发现，历家选取的 1324/87

---

①新唐书历志(卷 30 下). 中华书局编. 历代天文律历等志汇编(7). 北京：中华书局，1976. 2351 ~2361。

或 1811/119 皆是其 $t/24$ 的一个很好的渐近分数。由表 4-10 可知，历家取 1811/119 为平气长度，更是一个极佳的近似分数。如果令 487/32 与 1811/119 为 $t/24$ 的两个相邻的渐近分数，则必有

$$365.2437 = 24 \times \frac{1811}{119} < t < 24 \times \frac{1811 + 487}{119 + 32} = 365.2450$$

表 4-10　宋代历法之乘法/除法分析

历名	m/n	$t/24$	$t/24$ 的渐近分(第 6 个起)	$\lvert t/24 - m/n \rvert$
崇天历	$\frac{487}{32}$	$\frac{3\,867\,940}{10\,590}$	$\frac{487}{32}, \frac{1811}{119}, \frac{2298}{151}, \cdots$	2.3×10^{-4}
纪元历	$\frac{1811}{119}$	$\frac{2\,662\,626}{7290}$	$\frac{487}{32}, \frac{1324}{87}, \frac{1811}{119}, \frac{39\,355}{2586}, \cdots$	3.2×10^{-6}
乾道历	$\frac{1324}{87}$	$\frac{10\,957\,308}{30\,000}$	$\frac{487}{32}, \frac{1324}{87}, \frac{1811}{119}, \frac{24\,867}{1634}, \cdots$	9.3×10^{-5}
淳熙历	$\frac{1811}{119}$	$\frac{2\,059\,974}{5640}$	$\frac{487}{32}, \frac{1324}{87}, \frac{1811}{119}, \frac{37\,544}{2467}, \cdots$	3.4×10^{-6}
会元历	$\frac{1811}{119}$	$\frac{14\,134\,932}{38\,700}$	$\frac{487}{32}, \frac{1811}{119}, \frac{130\,879}{8600}$	9.8×10^{-7}

对于宋代《明天历》之前的唐宋历法，其回归年 t 皆在 365.2444 与 365.2449 之间，因此，这些历法中的平气长度 $t/24$，必以 487/32 与 1811/119 为其相邻的两个渐近分数。如果令 1324/87 与 1811/119 为 $t/24$ 的相邻的两个渐近分数，则必有

$$365.2427 = 24 \times \frac{1324 + 1811}{87 + 119} < t < 24 \times \frac{1811}{119} = 365.2437$$

对于《授时历》与《明天历》之间的历法，只有《会元历》的回归年 $t = 365.243\,72 > 24 \times 1811/119$，《统天历》$t = 365.2425 < 365.2427$，由表 4-10 知，前者以 487/32 与 1811/119 为 $t/24$ 之相邻的两个渐近分数，后者采用的是岁实消长术。其余诸历回归年 t 皆在 365.2427 与 365.2437 之间，因此，这些宋金元历法中的平气长度 $t/24$ 必以 1324/87 与 1811/119 为其相邻的两个渐近分数。倘若没有类似连分数展开之类的算法，要想获得 1324/87 或 1811/119 这样的数据也是不易做到的。

第四节　汉历连分数算法说质疑

一、连分数说之缘起

在祖冲之《大明历》之前，中国历法中的五星会合周期 x 皆以如下分数表示

$$x = tM/N(\text{日})$$

其中，t 为回归年；M 称作日率，N 为周率。意思是：M 个回归年内，行星与太阳会合的次数为 N。由于回归年常数 t 既定，因此，各历取五星会合周期 x 的选择便等价于确定分数 M/N。

20 世纪中叶，吕子方通过对《三统历》诸多天文常数的具体计算与细致考察（除朔望月常数之外，其余皆为五星会合周期），提出，分数 M/N 系据实测五星会合周期 x_0 与回归年 t 之比值（x_0/t）按连分数展开求取其渐近分数的结果，[29] 此说在 80 年代重新发表，引起了天算史界的关注。何鲁在为吕文所写的序言中说道：

> 三统历法……数字虽多，而附会尤甚，失其真意，至使读者难明，殊为憾事。吕子方洞该西学，钻研旧籍，著《三统历》历意及其数源，析以新法，洞中窥要，尤能明古人之用心，使二千年前之成绩焕然一新，厥功甚伟。[20]

对吕子方的工作给予很高的评价。吕子方还在另一篇文章中强调指出，《东汉四分历》中所称“五星数之生也，各记于日，与周天度相约而为率”便是连分数说的根据所在，何鲁在为吕文的序言中更明确指出：“余以为，‘通其率’三字即有求连分数之意。”[20]

连分数算法何时问世，在数学史上无疑是一件比较有趣也是重要的事件，对中算史而言，其意义似乎尤其不一般，因为，这种算法本身不仅同中国古代天算家所擅长的不定分析理论有一定的渊源，而且历史上一些有名的悬案亦常常引发学者们有关连分数算

法存在的猜想。华罗庚便曾著文指出，祖冲之的圆周率密率 π = 355/113 系得自连分数展式，[19] 此说虽然在国内外数学史界尚存异议，但吕子方的论述无疑向前更进了一大步，倘吕说不虞，则对华说的疑虑必将涣然冰释。

因此，弄清楚这一事件的历史真象，显然是件有意义的事情。李迪曾特意将"汉历连分数算法"问题列为中国数学史尚待解决的若干问题之一。[30] 本节企图说明的是，在汉历五星会合周期的选择上，恐怕并未使用连分数算法。

二、东汉到刘宋历法五星数源

根据第二章对古历上元推算的系统考察，我们已经从理论上证明并非所有从上元起算的天文周期都参与了其上元的计算，换句话说，有些天文常数（如五星会合周期）是在上元确定之后，才经过调整附会既定上元获得其历取值的。在对《东汉四分历》、《乾象历》、《景初历》的上元进行了实例推演之后，我们发现，此三历的五星会合周期均未具备参与推求其上元的条件，由此推断，它们的历取五星会合周期常数当不是独立于上元而事先确定的。

倘若假定此三历五星常数系依连分数算法展开所得的结果，则只能导出它们不从既定上元起算的结论，但这与事实矛盾。因此推知，假定用连分数展开求取此三历五星常数的前提是不能成立的，那么，它们是如何同既定上元相配合的呢？换句话说，它们的历取数据是如何得到的？

1. 五星会合周期之选择与误差分析

通过第二章第三节的讨论，我们得出的结论是《东汉四分历》、《乾象历》、《景初历》的五星会合周期根本不具备参与确定其各自上元的必要条件，欲令它们与既定上元相配合，使历注五星见伏从上元起算，只能采取某种方式调整选择历取五星会周 M/N 以附会既定上元。关于此间历法五星会合周期的选择方式，我们有

如下的推测：

首先，通过一些简单的计算，求得治历前后某年（假设为公元 n 年）冬至日某行星行至冬至点附近与太阳会合，因上元之始，诸行星与太阳即处此状态，所以，从既定上元到此年冬至日间隔恰为 N_n 个回归年，行星与太阳会合的次数适为一整数。设 t 为历取回归年，则上元以来 N_n 年内共积日 tN_n 天，以治历者所掌握之该行星的会合周期 x_0 约取之，设

$$N^* = \frac{tN_n}{x_0} + \delta \tag{4-13}$$

令 $|\delta| \leqslant 0.5$，于是得该行星从上元至此年冬至日共与太阳会合的次数为 N^*（整数），取

$$\frac{M}{N} = \frac{N_n}{N^*}$$

即得该行星历取会合周期：$x = tM/N$，它与参照值 x_0 的调整误差可由式（4-13）直接导得

$$|x - x_0| \leqslant \frac{x_0^2}{2tN_n} \tag{4-14}$$

满足上式之历取五星会合周期 x 是其参照值 x_0 的最佳选择。这种算法，是在上元既定之前提下选择历取会合周期 M/N 的最佳方案。调整误差估计式（4-14）清楚地表明：历取五星会合周期的精度不仅与当时的实测水准相关，而且与会合周期大小的平方成正比，并与积年数 N_n 成反比。

由式（4-14）对《东汉四分历》、《乾象历》及《景初历》五星会合周期所做误差分析表明，不同历法积年数 N_n 的大小，几乎成为此间历取五星会周精度好坏的关键（文献[22]）。朱文鑫指责《景初历》：

> 其五星所推，因拘于同出上元壬辰，未能密合，故五星见复之期，除火星外，皆不如《乾象》之密。[31]

实际上，这并不能归咎于杨伟对五星会合周期精度认识上的倒退，

因为在这种方式下选择 M/N,即使以理论值为参照值 x_0,除火星外,《景初历》所取五星会合周期基本上仍为杨伟选定的数据,其故所在,实在是因为《景初历》上元太近,因此,出现这种倒退的现象,在很大程度上是不可避免的。

因此,要想提高历取五星会合周期精度,根据式(4-14),只有扩大上元积年 N_n,否则,便只好如何承天那样,放弃理想上元中五星连珠的假想,使其彻底摆脱上元的桎梏。但是,何承天的创举,显然与古人的追求背道而驰,在不改变五星会合周期历取形式的前提下,各立后元不过是保障其精度的权宜之计。因为《元嘉历》设数皆十分简单,不可能选择一个庞大的上元积年,所以,何氏所为实属不得已而为之。

五星精度与理想上元之间的矛盾,导致了历法史上的一次改革,祖冲之在其《大明历》中,率先径以星率 M 及纪法 B(回归年之分母:$t = T/B$)表示历取五星会合周期 $x = M/B$,成功地缓解了这场危机。

2. 五星会合周期的近距起点

以上述方式选择历取五星会合周期 M/N,关键是要计算出治历前后某年冬至日行星在冬至点附近与太阳会合,即当年的上元积年 N_n满足

$$N_n \equiv 0 (\bmod M)$$

我们把这一年的冬至日称为该行星的近距起点。例如,《东汉四分历》与《乾象历》木星的近距起点的确定:熹平四年(174)距《东汉四分历》上元积年 $N_{174} = 9455$ 年,其木星日率 $M = 4725$,由于 $9455 \equiv 5 (\bmod 4725)$,故得《东汉四分历》木星的近距起点为公元169年。

又如,建安十一年(206)距《乾象历》上元积年 $N_{206} = 7378$ 年,而《乾象历》木星日率 $M = 7341$,由于

$$7378 \equiv 37 (\bmod 7341)$$

所以《乾象历》木星的近距起点恰好也是公元 169 年。

有意思的是,《东汉四分历》与《乾象历》木星近距起点竟然完全一样,这表明刘洪在编制《乾象历》时,沿袭了《东汉四分历》的这些结果。这一点绝非偶然。表 4-11 的结果表明,这两部历法的五星近距起点完全一样,它确凿地证明了我们关于此间历法五星会合周期 M/N 的选择方案的猜想。

表 4-11　五星会合周期近距起点(公元纪年)

	木星	火星	土星	金星	水星
东汉四分历	169	99	134	41	164
乾象历	169	99	134	41	164
景初历	-45	1296	134	5	70

值得注意的是,《景初历》五星的近距起点只有土星一项与前两历相同,这种情形的出现是有其客观原因的:这些近距起点一般系推算而得,未必是实测结果,随着时间的推移,必然出现愈来愈明显的误差,尤其是在积年数 N_n 过小,历取周期精度无法保证之情形下,倘一味地沿用前任历法的近距起点,不仅难以获得理想数据,也不利于实际推算,所以重新选择近距起点,实属情理之中事。①

据第二章第三节的讨论,我们知道,《东汉四分历》与《乾象历》之上元是通过日名、回归年、朔望月与交食周期构成的两个同余式组确定的,《景初历》则直接以前三项为先决条件推定其上元。此三历之五星会合周期均未参与各自上元的推求,它们是通过相同的附会既定上元的方式选择其历取五星数据并与之配合的。由此可见,东汉到刘宋时期的五星数源,本与连分数算法

---

①关于《景初历》五星对于近距起点的选择,参见拙作"试论东汉四分历乾象历景初历之上元与五星会合周期",见:李竞主编.中国天文学史文集(6).北京:科学出版社,1994.75～78。

无涉。

三、连分数说在算理上遇到的困难

吕子方用连分数展开推求五星会合周期常数 M/N 的步骤为:首先把历取五星会合周期 x 化为十进分数形式的近似值,作为治历者据以推求其历取值的参照常数 x_0,然后将 x_0 与历取回归年 t 相除,再依连分数展开,从中挑选某个渐近分数作为 M/N。以《三统历》木星会合周期 x 为例

$$x = 398\frac{5\ 163\ 102}{7\ 308\ 711}\text{日},\text{回归年 } t = 365\frac{385}{1539}\text{日}$$

吕子方取木星会合周期参照值 $x_0 = 398.7064$ 日,于是有连分数展式

$$\frac{t}{x_0} = \frac{5\ 621\ 200\ 000}{6\ 136\ 091\ 496} = [0;1,10,1,11,11,1,\cdots]$$

由此而得 t/x_0的渐近分数列为

$$\frac{1}{1},\frac{10}{11},\frac{11}{12},\frac{131}{143},\frac{1452}{1585},\frac{1583}{1728},\cdots$$

因《三统历》木星小周为12,而上述诸分数中,分母含12为因子者只有

$$\frac{11}{12},\frac{1583}{1728}$$

且尤以后者为精密,故取 $N/M = 1583/1728$,于是得木星会合周期

$$x = t \times \frac{M}{N} = 365\frac{385}{1539} \times \frac{1728}{1583} = 398\frac{5\ 163\ 102}{7\ 308\ 711}(\text{日})$$

按上述连分数算法求取五星常数 M/N,通常无法预知日率(《三统历》称为岁数)M 之因子构成,一般说来,治历者更不能指望由此获得的五个行星的日率 M 具有某些共同的特征。

细考《三统历》五星岁数 M,发觉它们的素因子仅有2,3,5,如此特别的数字,在整数系中实在不多,那么,参照值 x_0在什么范围

内变化，才能保证在连分数的展开过程中必然包含以

$$M=2^{r_1}\times 3^{r_2}\times 5^{r_3}(r_i\text{为非负整数})$$

为岁数的分数 M/N 为 x_0/t 的某个渐近分数呢？换个说法，亦即存在一个怎样的正实数 δ，使得对于任意给定的 $x_0>0$，当

$$\left|x_0-t\times\frac{M}{N}\right|<\delta$$

时，必有 $x_0/t=[a_0;a_1,\cdots,a_k\cdots]$，以 M/N 为其渐近分数之一：

$$M/N=\varphi_k=[a_0;a_1,\cdots,a_k]$$

为回答这个问题，我们引入如下定理：

定理 5　令 $\varphi_k=[a_0;a_1,\cdots,a_{k-1},a_k]$，则对于任意给定的正实数 θ，当 $a_k^*\geqslant a_k$ 时，$\theta=[a_0;a_1,\cdots,a_{k-1},a_k^*\cdots]$ 的充要条件为：θ 介于 φ_{k-1} 与 φ_k 之间。

证明　$\theta=[a_0;a_1,\cdots,a_{k-1},a_k^*,\cdots]$ 表示，θ 以 φ_{k-1} 为其渐近分数之一。因为

$$\varphi_k=[a_0;a_1,\cdots,a_{k-1},a_k]$$

所以，对于任意自然数 k，$\varphi_{2k}>\varphi_{2k-2}$，$\varphi_{2k+1}<\varphi_{2k-1}$，且 $\varphi_{2k}<\varphi_{2k+1}$，即

$$\varphi_0<\varphi_2<\cdots<\varphi_{2k}<\varphi_{2k+1}<\cdots<\varphi_3<\varphi_1$$

由以上展式显而易见，若 $\theta=[a_0;a_1,\cdots,a_{k-1},a_k^*,\cdots]$，且 $a_k^*\geqslant a_k$，必有 θ 介于 φ_{k-1} 与 φ_k 之间。

又，假定 $\varphi_{2k}<\theta<\varphi_{2k+1}$，令 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分，因为，$[\varphi_{2k}]=[\varphi_{2k+1}]=a_0$，所以，必有 $[\theta]=a_0$，于是

$$0<\varphi_{2k}-a_0<\theta-a_0<\varphi_{2k+1}-a_0<1$$

因为 $\left[\dfrac{1}{\varphi_{2k}-a_0}\right]=\left[\dfrac{1}{\varphi_{2k+1}-a_0}\right]=a_1$，所以，$\left[\dfrac{1}{\theta-a_0}\right]=a_1$。令

$$\varphi_{2k}^*=\frac{1}{\dfrac{1}{\varphi_{2k}-a_0}-a_1},\varphi_{2k+1}^*=\frac{1}{\dfrac{1}{\varphi_{2k+1}-a_0}-a_1}\text{及 }\theta^*=\frac{1}{\dfrac{1}{\theta-a_0}-a_1}$$

则有 $\varphi_{2k}^*<\theta^*<\varphi_{2k+1}^*$。因为，$[\varphi_{2k}^*]=[\varphi_{2k+1}^*]=a_2$，所以，$[\theta^*]=$

a_2。如此递推,据归纳法可知:当 $\varphi_{2k} < \theta < \varphi_{2k+1}$时,必有

$$\theta = [a_0; a_1, \cdots, a_{2k}, a^*_{2k+1}, \cdots]$$

其中,$a^*_{2k+1} \geqslant a_{2k+1} > 0$。因为前面已经指出对于任意自然数 k,必有 $\varphi_{2k} < \varphi_{2k+1}$,所以,其他情形不难类推。

由此即证,当 $a^*_k \geqslant a_k$时,$\theta = [a_0; a_1, \cdots, a_{k-1}, a^*_k, \cdots]$的充要条件为:$\theta$ 介于 φ_{k-1}与 φ_k之间。

根据定理5,可以立刻推出第一节中给出的定理2。由于有限连分数展式有且仅有两种不同形式的表示:$a_k > 1$ 时

$$m/n = [a_0; a_1, \cdots, a_k] = [a_0; a_1, \cdots, a_k - 1, 1]$$

因而实数 $\theta = [a_0; a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots]$ $(a_k > 1)$ 与 $\theta^* = [a_0; a_1, \cdots, a_k - 1, 1, a^*_{k+1}, \cdots]$虽然不同,但却皆以$[a_0; a_1, \cdots, a_k]$为其渐近分数之一。因此,定理2 中才会有 $a_k > 1$ 这样的限定。如此一来,这个结果在具体应用中便有些不便,所以,还需要进一步确切的刻画性定理。这就是第三节中我们已经构造出来的下述定理:

定理 6　假令 $m/n = [a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k]$, $m_0/n_0 = [a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}]$, $a_k > 1$。(必要条件)若 $\left|\theta - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n(2n - n_0)}$,则实数 θ 必以 m/n 为其渐近分数之一;(充分条件)若实数 θ 以 m/n 为其渐近分数之一,则必有 $\left|\theta - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n(n + n_0)}$。

利用定理3 就可以对《三统历》的五星常数 M/N 进行定量的误差分析。令

$$m/n = M/N = [a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k], m_0/n_0 = [a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}]$$

$$\frac{x}{t} = \frac{M}{N}, \theta = \frac{x_0}{t}$$

于是,θ 以 M/N 为其渐近分数之一的充分条件为

$$|x - x_0| = \left|\theta - \frac{m}{n}\right| \times t < \frac{t}{n(n + n_0)} = \delta \tag{4-15}$$

表 4-12　《三统历》五星常数 M/N 误差分析

	m/n	m_0/n_0	δ	$\lvert x-x_0\rvert$
木星	1728/1583	1585/1452	7.6×10^{-5}	3.1×10^{-5}
金星	3456/2161	2159/1350	4.8×10^{-5}	2.9×10^{-5}
土星	864/835	149/144	4.4×10^{-4}	9.7×10^{-5}
火星	13 824/6469	1139/533	8.0×10^{-6}	2.4×10^{-6}
水星	9216/29 041	913/2877	3.9×10^{-7}	2.6×10^{-7}

注：数据 $m/n=M/N$ 取自《三统历》，表中 x_0 为吕子方计算时所取之约分后的近似值。[20]

由表4-12 可知，欲令 $\lvert x-x_0\rvert<\delta$，木、金、土三星之会合周期需将参照值 x_0 取至 4 位小数以上，而火星与水星则分别为 5 位与 6 位小数。对五星会合周期而言，如此高的精度标准，即使在元代郭守敬之《授时历》也不能达到，对照前面所述东汉到刘宋时期历取五星会合周期的误差控制式(4-14)，不难看出，就西汉历家取数标准来讲，其历取五星会合周期不大可能将参照值 x_0 精确到 10^{-4} 日，甚至 10^{-6} 日，尤其不会将周期长而观测精度最疏的火星会合周期参照值 x_0 取至 5 位小数。

退一步而言，即便《三统历》作者果然将参照值 x_0 取至 4～6 位小数，并依吕子方所假定的方案选择五星常数 M/N，那么，他所确定的参照值 x_0 也几乎没有可调整的余地，治历者将根本无法指望五星大周岁数 M 能够具有某种共同的特征。因而，我们只能用偶合来解释《三统历》中所有 M 皆以 2，3，5 为其因子这一事实。

通过简单的估算可知，15 000 以下，1000 以上，仅以 2，3，5 为因子的数不超过 120 个，所以，各渐近分数列 M/N 中出现此类数的概率应不超过

$$\frac{120}{14\ 000}=8.5\times10^{-3}$$

由于《三统历》所有五个行星的岁数 M 皆为此类数值，因而这种事件发生的概率不会超过

$$(8.5\times10^{-3})^5=4.6\times10^{-11}$$

即使我们考虑到在渐近分数列中可能有若干个在精度与数据之繁简方面均合乎要求的分数供历家选择的情况，这仍将是一极小概率事件。

另外，按照我们所构造的定理6及由此产生的误差分析表明，五星常数 M/N 成为 $\theta=x_0/t$ 的渐近分数之一的充分条件为：参照值 x_0 必须满足式(4-15)。因此，吕子方按其连分数算法所进行的一系列详细的实例演算，意欲证实各项常数 M/N 均是 x_0/t 的渐近分数之一的结论，并不是一件偶然现象，而是在参照值 x_0 满足式(4-15)之情形下的必然结果！所以，这些演算本身，并不能证实常数 M/N 必系得自连分数算法这个结论。

通过以上算理分析不难看出，《三统历》五星常数 M/N 系连分数算法之产物的论据是难以成立的。这些数据除了人为的方式构造出来之外，很难想像它们会是某个实测值的渐近分数。

四、《三统历》五星常数的结构分析

《三统历》将日率 M 称为岁数，内行星周率 N 称为复数，外行星周率 N 称为见数，单列一章记述五星的各项基本数据，章名记母，各节首项及第四项分别为 M 与 N 之条目，按木、金、土、火、水五节次第而述。[①]

在中国历法史上，恐怕没有任何一部历法能比《三统历》更加强调象数神秘主义的附会之辞，其改编者刘歆几乎对于所有历取天文常数都赋予了某种近乎神圣天赐的巧妙组合。有关五星常数的特别结构，主要体现在岁数 M 的构成上。刘歆把五大行星按天生水、木、土与地生火、金，将其分划为两类。前三星之岁数 M 分

①汉书律历志(卷21下). 中华书局编. 历代天文律历等志汇编(5). 北京：中华书局，1976. 1423～1426。

别取巛策(巛为坤之古字)144与各自小周(内行星称为小复,下同)之积;而火星与金星则分别取其岁数 M 为乾策216与各自小周(复)之积,见表4-13。

表4-13　《三统历》五星常数 M 之构成

星名	小周或小复	巛策或乾策	岁数 M
木星	12	144	$1728 = 12 \times 144$
金星	16	216	$3456 = 16 \times 216$
土星	30	144	$4320 = 30 \times 144$
火星	特成,64	216	$13\,824 = 64 \times 216$
水星	特成,64	144	$9216 = 64 \times 144$

如果我们把《三统历》五星岁数 M 的这种特殊组合完全斥之为刘歆神秘主义的附会之说,恐怕并不合适。因为我们注意到,除了巛策144与乾策216为《易辞》中不可捏造之数据外,五星的小周或小复亦多为秦汉时代人们对五星会合周期的粗略认识。例如,木星12年行一周天是先秦时期妇孺皆知的一般常识,据《淮南子·天文训》记载:

> (木星)日行十二分度之一,岁行三十度十六分度之七,十二岁而周。[32]

当时的人们便据此将天空划分为12次,岁星记年即肇出于此。又据马王堆帛书《五星占》记载:

> 太白出东方,行百廿分……。太白[一复]为五[百八十四日九十六分日,出入东西各五,复]与营室晨出东方,为八岁。[32]

《五星占》采用240为一日分数,故有金星会合周期为

$$584\,\frac{96}{240} = 584.4\ \text{日}$$

与《四分历》回归年365.25日相比,得

$$\frac{584.4}{365.25} = \frac{8}{5} = \frac{16}{10}$$

相当于金星 16 年见复数 10 次，与《三统历》金星小复近合。亦据《五星占》记载：

> 填星在营室，日行八分，卅日而行一度，……凡见三百七十七日而复出东方，卅岁一周于天。

适与土星小周 30 吻合。关于水星与火星，笔者尚未找到确实的史料提供其小复与小周的出处。至于秦汉时期人们是否以 64 为其小复与小周，是值得怀疑的。《三统历》作者在叙述这两个行星岁数 M 时，专门指出“水经特成”、“火经将成”，说明它们的选择可能与前述三星所出有据是不同的。

总而言之，我们以为《三统历》五星会合周期应当是在先确定岁数 M 之情形下，再据参照值及其他因素（如配合上元等）调取而得的。对于木星和土星而言，M = 小周 × 巛策 144，可以认为是径直取定的结果，别无选择。对于金星，其小复本可取 8，结果为 16，应是进行了一次调整。火星与水星的岁数 M，则分别是选择小周与小复再去乘乾策 216 或巛策 144 的结果，它们的可调整选择的余地比之金星则更宽一些。

按照先取 M，再据参照值 x_0 调整选择历取五星会合周期 $x = tM/N$ 的方案（其中 t 表示回归年历取值），有如下误差估计：假令 $N = tM/x_0 + \delta_0$，$|\delta_0| \leqslant 0.5$，则有

$$|x - x_0| \leqslant \frac{x^2}{2tM} \tag{4-16}$$

将式（4-16）与式（4-14）相比较，可以看出这两个误差估计式十分相像，区别在于式（4-14）表明五星的调整误差与积年数 N_n 的大小成反比，而后者则与岁数 M 的大小成反比。如果进一步考察《三统历》五星岁数 M 与《东汉四分历》、《乾象历》、《景初历》的上元积年数，可以发现，它们基本上处在同一数量级上，这或许反映了汉代历法家对五星精度标准之把握的延续与继承。

有必要说明的一点是，关于《三统历》五星常数 M/N 的具体选取方式，是一个比较复杂的、有待进一步深入探讨的问题，必须

把这些常数与《三统历》上元的推算放在一起通盘考虑。如果说，这些五星会合周期全部参与了三统上元的推算，那么，它们可以被视为独立于三统上元而事先拟定的常数，其选取方式及误差估计可如以上讨论。

但据李文林等人的研究，参与三统上元推求的五星常数，仅有木星会合周期一项，[33]如果说其他四个行星是通过调整各自的历取常数以附会《三统历》既定上元的方式确定其常数值，那么具体的调整方案不外乎以下两种：

其一，适当调整岁数 M 中的小周或小复，如金星之小复取 16 而非 8，水星与火星之小周(复)系特别拟取，均可能是此类调整的结果。

其二，在确定岁数 M 之情况下，调整见复数 N，这样将损害历取常数的精度。《三统历》五星会合周期较之《四分历》粗劣许多的原因，或许与此类调整不无关系。

通过前面的讨论可以看到，《三统历》与《东汉四分历》、《乾象历》及《景初历》选择历取五星常数的方式是不同的。后三历五星常数 M/N 系根据对既定上元的直接配合而得的，而《三统历》则是在挑选了特别的岁数 M 之后，再参照其他方面的一些因素确定其历取五星会合周期的。无论如何，可以肯定的一点是，它们均不是连分数算法的产物。

因此，我们说，就目前的研究来看，恐怕还不能从汉历一些天文常数的选择方式上得出当时已存在连分数算法的结论。

参　考　文　献

[1] 曲安京．中国古代历法中的上元积年计算．见:数学史研究文集(1)．呼和浩特:内蒙古大学出版社;台北:九章出版社,1999.24～37

[2] 陈美东．论我国古代年、月长度的测定(上)．见:科技史文集(10)．上海:上海科技出版社,1983.9～26

[3] 曲安京．中国古代历法中之朔望月常数的选择．西北大学学报(自然科学版),1994,24(4):323～329

[4] [宋]周琮.《明天历》议．宋史律历志(卷74)．见:历代天文律历等志汇编(8)．北京:中华书局,1976.2633～2634

[5] [宋]李心传．建炎以来朝野杂记(乙集卷5).1216

[6] [宋]秦九韶．数书九章(卷3).1247

[7] 李继闵．关于“调日法”的数学原理．西北大学学报(自然科学版),1985,15(2):5～21

[8] 李继闵．秦九韶关于“调日法”的记述．见:秦九韶与《数书九章》．北京:北京师范大学出版社,1987.327～337

[9] 严敦杰．宋金元历法中的数学知识．见:宋元数学史论文集．北京:科学出版社,1966.212～213

[10] 李继闵．调日法源流考．见:第三届中国科学史国际讨论会论文集．北京:科学出版社,1990

[11] [清]李锐．日法朔余强弱考．见:李氏算学遗书.1799

[12] [清]顾观光．日法朔余强弱补考．见:武陵山人遗书.1854

[13] 刘钝．李锐、顾观光调日法工作述评．自然科学史研究,1987,6(2):147～156

[14] 陈久金．调日法研究．自然科学史研究,1984,3(3):245～250

[15] 李继闵．再评清代学者的调日法研究．自然科学史研究,1988,7(4):335～345

[16] 曲安京.《大明历》上元积年计算．见:数学史研究文集(2)．呼和浩特:内蒙古大学出版社;台北:九章出版社,1991,51～57

[17] [宋]秦九韶．数书九章．见:中国古代科技典籍通汇(数学卷1)．郑州:河南教育出版社,1993

[18] 曲安京．论中国历法中之闰周的数学性质．见:数学史研究文集(5)．呼和浩特:内蒙古大学出版社;台北:九章出版社,1993.14～25

[19] 华罗庚．从祖冲之的圆周率谈起．见:华罗庚科普著作选集．上海:上海教育出版社,1984.47～80

[20] 吕子方.《三统历》历意及其数源．见:中国科学技术史论文集．成都:四川人民出版社,1983

[21] 李继闵.“通其率”考释．见:中国数学史论文集(1)．济南:山东教育

出版社,1985

[22] 曲安京．东汉到刘宋时期历法五星会合周期数源．天文学报,1992,33(1):109～112

[23] 曲安京．汉历连分数算法说质疑．见:数学史研究文集(6)．呼和浩特:内蒙古大学出版社,1998.13～21

[24] Petr Beckmann. A History of Pi. New York:St. Martin's Press,1971

[25] 曲安京．唐代太乙术数中的历法探微．见:周秦汉唐研究(1)．西安:三秦出版社,1997.381～400

[26] G H Hardy & E M Wright. An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford:Oxford University Press. 1979.140

[27] 薮内清．隋唐历法史の研究．东京:三省堂版,1944.96～98

[28] 刘金沂．隋唐历法中入交定日术的几何解释．自然科学史研究,1983,2(4):316～321

[29] 吕子方．三统历历意及其数源．自然辩证法学术研究(4),1980,9:15

[30] 李迪．中国数学史的未解决问题．见:中国数学史论文集(3)．济南:山东教育出版社,1987.10～27

[31] 朱文鑫．历法通志．上海:商务印书馆,1934

[32] 席泽宗．马王堆汉墓帛书《五星占》释文．见:中国天文学史文集．北京:科学出版社,1978

[33] 李文林,袁向东．论汉历上元积年计算．见:科技史文集(3)．上海:上海科技出版社,1980

第五章　内　插　法

公元600年前后，刘焯在创编《皇极历》时，制定并多次使用了分段抛物内插算法。这种二次内插法的出现，对此后数百年间中国传统历法乃至数学都产生了非常深刻的影响，几乎成为所有历算家必用的主要数学方法之一。

中算家的内插法，是天算史界多年来众所瞩目的一个课题，薮内清[1]、李俨[2]、钱宝琮[3]、严敦杰[4]等著名学者对此皆曾做过深入的研究和精辟的论述。实际上，通过他们的疏解，读者已大体上了解了中国古代历法中内插法的基本结构。中算家的内插法之所以仍然吸引着众多学者的兴趣，关键是因为对二次内插算法的源流以及三次内插算法的构造原理尚未有可靠的把握。

现代数学告诉我们，多项式内插法可以有许多种不同类型，但实质上彼此是等价的。之所以出现不同类型的多项式插值法，其原因在于它们的构造思想是不同的。从这个意义上讲，仅仅知道中国古代的历算家已经正确地构造了二次、三次内插算法，是远远不够的。我们必须弄清楚这些插值算法究竟是如何构造出来的。

这就是我们的出发点。

第一节　二次内插法

从算法的本质来讲，中国古代历法中出现的所有分段二次内插法的造术思想基本上都是一样的，因此，只要选取一个典型算法为例，做一番造术原理的剖析，其余便不难类推。为使我们的叙述方便和简明，首先以宋代的定型算法《崇天历》(1024)的日躔术为例，分析等间距二次内插法的构造机理，然后再讨论刘焯之后同类

算法与它的些微差别。

一、等间距二次内插法

日躔术是用以推算一个回归年内，从冬至（夏至）起算，每一天太阳实际运行与平均运行距离之差的算法。[①] 通常，历法家们都将一个回归年划分为 24 段，并以 24 气为结点，分别给出各段太阳实行度与平行度之差的改变量，以及这些改变量从冬至（夏至）日起算的累计值。然后，利用这张日躔表所提供的实测数据，分别在各个段内建立二次内插公式，以推求冬至（夏至）后每一天的日躔数值。因此，它实际上是一种分段抛物内插算法。

假设 n 日表示一个平气的长度，以 $f(x)$ 表示冬至后第 x 日太阳实行度与平行度之差，则通过日躔表，我们已知冬至后第 k 气的盈缩分

$$\Delta_k = f(kn) - f((k-1)n), \quad k = 1,2,\cdots$$

令 $f_k(m)$ 表示冬至后第 k 气内前 m 日的盈缩分，则冬至后第 $x=(k-1)n+m$ 日太阳中心差的计算公式为

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \Delta_i + f_k(m)\text{（日）} \tag{5-1}$$

其中，$(k-1)n \leqslant x < nk$ 日。因为对于任意指定的节气 k，函数(5-1)中的首项

$$f(kn) = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i$$

是一个常数，因此，对于中心差函数 $f(x)$ 的构造，就相当于对冬至后第 k 气的盈缩分函数 $f_k(m)$ 的构造。根据刘焯的算法，我们可以知道冬至后第 $x=(k-1)n+m$ 日的盈缩分函数

①由于中国古代历法家认为冬至点为太阳的近地点，因此，这个差值，相当于现代天文学中太阳视运动的中心差。

$$f_k(m)=\frac{m}{n}\times\Delta_k+\left(1-\frac{m}{n}\right)\frac{m}{2n}\times\Delta_k^2 \qquad (5\text{-}2)$$

其中，$\Delta_k^2=\Delta_k-\Delta_{k+1}$。由于 $f_k(0)=0, f_k(n)=\Delta_k, f_k(2n)=\Delta_k+\Delta_{k+1}$，可见这是一个二次插值函数。实际上，函数(5-2)是刘焯以后中国历法家构造的等间距二次内插法的通用形式。

由于在各气上构造的函数 $f_k(m)$ 都是一样的，而式(5-1)的第一项为常数，因此，我们无妨直接考虑冬至后第一个节气上的函数的构造。此时 $k=1, x=m, f(x)=f_1(m)$

$$f(x)=\frac{x}{n}\times\Delta_1+\left(1-\frac{x}{n}\right)\frac{x}{2n}\times\Delta^2 \qquad (5\text{-}3)$$

其中，$0\leqslant x<n, \Delta^2=\Delta_1-\Delta_2$。通常人们所谓的中国古代历法中的等间距二次内插公式，实际上就是式(5-3)。下面，我们将根据古代历法中的原始文献，具体考察一下，有如式(5-3)的内插函数是如何构造出来的。

1. 典型的等间距分段二次内插法

在讨论刘焯的算法之前，我们先找一部成熟的历法，看看它的二次内插算法的构造。据宋代《崇天历》(1024)日躔术术文称：

> 求每日盈缩定数：以乘法乘所入气升降分，如除法而一，为其气中平率；与后气中平率相减，为差率；半差率，加减其气中平率，为其气初、末泛率(至后加为初，减为末；分后减为初，加为末)。又以乘法乘差率，除法而一，为日差；半之，加减初、末泛率，为初、末定率(至后减初加末，分后加初减末)。以日差累加减气(之)[初]定率，为每日升降定率；(至后减，分后加)以每日升降定率，冬至后升加降减，夏至后升减降加其气初日盈缩分，为每日盈缩定数(其分、至前一气先后率相减，以前末泛率为其气初泛率，以半日差至前加之，分前减之。为其气初日定

率，余依本术）。[①]

假设 n 表示一个平气的长度，根据《崇天历》术文，我们有

$$n = \frac{\text{除法}}{\text{乘法}} = \frac{\text{回归年}}{24}$$

术文中的盈缩分表示冬至（或夏至）后第 x 日太阳的中心差，即太阳实行度与平行度之差 $f(x)$，升降分则表示某两个时刻之间盈缩分之差，所入（二至后第 k）气升降分记为

$$\Delta_k = f(kn) - f(kn - n), k = 1, 2, \cdots$$

在刘焯《皇极历》之后的传统历法中，因为要构造分段的二次插值算法，每一部历法都在日躔表中给出 24 气的升降分常数 Δ_k。总的说来，相邻两气的升降分常数 Δ_k 与 Δ_{k+1} 可以分成以下三类

$$\Delta_k > \Delta_{k+1}, \Delta_k = \Delta_{k+1}, \Delta_k < \Delta_{k+1}$$

其中，第一与第三种情形雷同，故无妨只讨论前者的造术方法。[②]为了使问题进一步简化，我们将直接考虑冬至后第一个节气上的函数式(5-3)的构造。此时 $k = 1, x = m$

$$f(x) = f_1(m), 0 \leqslant x < n$$

假令

$$g(x) = f(x) - f(x - 1), 1 \leqslant x < n$$

表示冬至后第 x 日的升降分，即当日太阳实行度与平行度之差，于是，这一天的盈缩分，即冬至后太阳的中心差就是

$$f(x) = \sum_{m=1}^{x} g(m) \tag{5-4}$$

---

①宋史律历志（卷72）. 中华书局编. 历代天文律历等志汇编(8). 北京：中华书局，1976，2579。

②中国古代天文学家通常认定冬、夏至点分别为近日点、远日点，于是，当太阳视运动经过这两点时，其速度分别达到最大、最小。因此，当古人用24气划分一个回归年，并在每一气上构造分段的二次插值函数时，在冬至前一气（大雪）、夏至前一气（芒种）会出现 $\Delta_k = \Delta_{k+1}$ 的情况。此时的二次内插法，采用特别的方式处理，参见文献[9]，187页。

如图 5-1 所示，v_0表示太阳的平均运行速度，折线 $A_{i-1}C_i$表示不同节气内太阳视运动平均速度的变化。假定 $B_{k-1}B_k=n(k=1,2,\cdots)$，表示一个平气的长度，令

$$\square A_0B_1=\Delta_1,\square A_1B_2=\Delta_2$$

分别表示冬至后第一、二气（本气与后气）的升降分，即该气内太阳实际运行与平均运行距离之差。日躔术的主要思路就是通过本气与次气升降分 Δ_1与 Δ_2，来构造本气内每一日升降分所形成的一个数列

$$g(1),g(2),g(3),\cdots$$

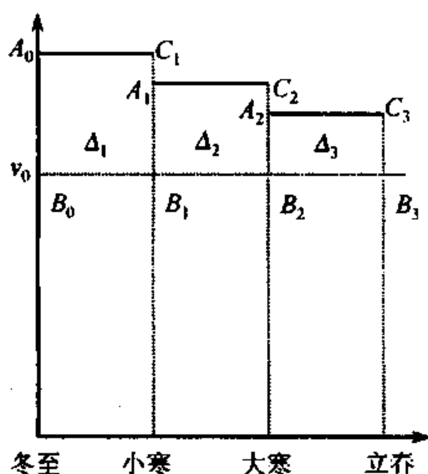


图 5-1　二次插值法构造图 Ⅰ

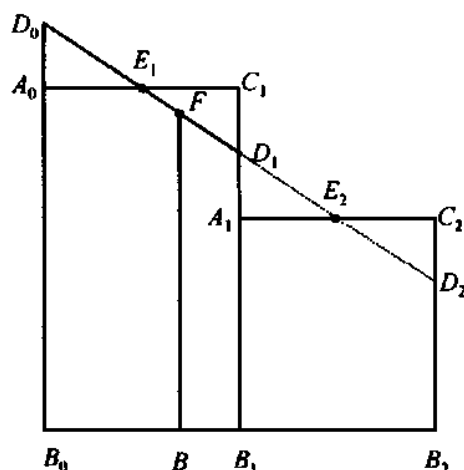


图 5-2　二次插值法构造图 Ⅱ

就二次等间距内插法而言，$g(x)$形成一等差数列，欲构造一个等差数列，只需确定数列的初项与数列的公差即可。据《崇天历》术文，这个数列的初项 $g(1)$与公差（即日差）皆是通过“差率”导得的。如图 5-1 所示，令

$$A_0B_0=\frac{\Delta_1}{n},A_1B_1=\frac{\Delta_2}{n}$$

分别为冬至后本气与次气平均每日的升降分，即术文中之中平率，指某一气内平均每一天太阳实行速与平行速之差，则对于等间距内插算法而言，有

差率　$$A_1C_1=\frac{\Delta_1-\Delta_2}{n}=\frac{\Delta^2}{n}$$

差率 A_1C_1 是本气与次气太阳平均速度之差。日躔术的目的，就是要将这个差值分摊到每一日上，亦即将本气的速度曲线 A_0C_1，由水平线，变换成一个逐日递减的斜线。为此，我们将图 5-1 中的 Δ_1 与 Δ_2 放大如图 5-2。令 E_1, E_2 分别为 A_0C_1, A_1C_2 之中点，连接 E_1, E_2，并延长之，使分别与 A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2 的延长线相交于点 D_0, D_1, D_2。令 $x=B_0B$，则有

$$f(x)\ =\ \text{梯形 } B_0BFD_0 \text{ 的面积}$$

利用图 5-2，可以得到术文中的如下数据

初汎率　$$B_0D_0=A_0B_0+\frac{A_1C_1}{2}=\frac{\Delta_1}{n}+\frac{\Delta^2}{2n}$$

末汎率　$$B_1D_1=A_0B_0-\frac{A_1C_1}{2}=\frac{\Delta_1}{n}-\frac{\Delta^2}{2n}$$

日差　$$\frac{A_1C_1}{B_0B_1}=\frac{\Delta^2}{n^2}$$

因为初汎率 B_0D_0 表示的是冬至后第一天初始时刻（即冬至时刻）太阳实行速与平行速之差的瞬时速率，而中国古代通常皆将各种变速运动在每一天之内规定为匀速，因此，冬至后第一天的升降分 $g(1)$ 应取其平均数，所以有

初定率　$$g(1)=B_0D_0-\frac{A_1C_1}{2B_0B_1}=\left(\frac{\Delta_1}{n}+\frac{\Delta^2}{2n}\right)-\frac{\Delta^2}{2n^2}$$

每日升降定率　$$g(x)=g(1)-\frac{(x-1)\Delta^2}{n^2}$$

每日盈缩定数　$$f(x)\ =\ \sum_{m=1}^{x} g(m)$$

由此即得冬至后第 x 日太阳的中心差公式

$$f(x)\ =\ \left(\frac{\Delta_1}{n}+\frac{\Delta^2}{2n}\right)x-\frac{\Delta^2}{2n^2}x^2 \tag{5-5}$$

其中，$0\leqslant x<n$。这就是《崇天历》日躔术所构造的求每日盈缩定

数的二次内插公式，对于式(5-5)，如果令

$$x=0,\text{则} f(x)=0$$

$$x=n,\text{则} f(x)=\Delta_1$$

$$x=2n,\text{则} f(x)=\Delta_1+\Delta_2$$

因此，$f(x)$是以 $x=0,n,2n$ 为三个插值点而确定的等间距抛物内插公式。公式(5-5)与公式(5-3)是等价的。

2. 刘焯的二次内插法与半日差问题

《皇极历》中称每日盈缩分 $f(x)$ 为迟速数，升降分 Δ_k 为陟降数，每气长度

$$n=10\times\text{汎总}/\text{日限}$$

其中，"汎总"是"盈汎"=17、"亏总"=16 的总称，"日限"=11，这些皆为给定的常数。

我们可以将《皇极历》算法的逐句释义，列如表 5-1 所示。根据表 5-1 的释文，可以知道，当本气陟降率 $\Delta_k<$ 后气陟降率 Δ_{k+1} 时，冬至后第 $x=(k-1)n+m$ 日的太阳中心差为

$$f(x)=\sum_1^{k-1}\Delta_i+\left(\frac{\Delta_k+\Delta_{k+1}}{2n}-\frac{\Delta_k^2}{n}\right)\times m+\frac{\Delta_k^2}{2n^2}\times m(m+1)$$

当 $\Delta_k>\Delta_{k+1}$ 时，冬至后第 $x=(k-1)n+m$ 日的太阳中心差为

$$f(x)=\sum_1^{k-1}\Delta_i+\left(\frac{\Delta_k+\Delta_{k+1}}{2n}+\frac{\Delta_k^2}{n}\right)\times m-\frac{\Delta_k^2}{2n^2}\times m(m-1)$$

由上述释文可见，刘焯日躔术的构造思想与《崇天历》算法基本上一致，所不同处有二：

其一，《皇极历》所求初率是按末率加减总差而得

$$\text{初率}=\frac{\Delta_k+\Delta_{k+1}}{2n}+\frac{\Delta_k-\Delta_{k+1}}{n}=\frac{3\Delta_k-\Delta_{k+1}}{2n}$$

而《崇天历》则系由中平率加减半总差而得

$$\text{初率}=\frac{\Delta_k}{n}+\frac{\Delta_k-\Delta_{k+1}}{2n}=\frac{3\Delta_k-\Delta_{k+1}}{2n}$$

两者殊途同归。

表 5-1　刘焯的等间距二次内插算法

《皇极历》原文①	算法释义
推每日迟速数术：	求 $f(x)$，其中 $x=(k-1)n+m, 0\le m<n$
见求所在气陟降率，并后气率半之，以日限乘而汎总除，得气末率。②	设本气与后气陟降率分别为 Δ_k、Δ_{k+1} 气末率 $=\dfrac{\Delta_k+\Delta_{k+1}}{2n}$
又日限乘二率相减之残，汎总除，为总差。	记：$\lvert\Delta_k-\Delta_{k+1}\rvert=\Delta_k^2$，总差 $=\dfrac{\Delta_k^2}{n}$
其总差亦日限乘而汎总除，为别差。	别差 $=\dfrac{\Delta_k^2}{n^2}$
率前少者，以总差减末率，为初率，乃别差加之；	当 $\Delta_k<\Delta_{k+1}$ 时，$g(1)=\dfrac{\Delta_k+\Delta_{k+1}}{2n}-\dfrac{\Delta_k^2}{n}+\dfrac{\Delta_k^2}{n^2}$
前多者，即以总差加末率，皆为气初日陟降数。	当 $\Delta_k>\Delta_{k+1}$ 时，$g(1)=\dfrac{\Delta_k+\Delta_{k+1}}{2n}+\dfrac{\Delta_k^2}{n}$
以别差前多者日减，前少者日加初数，得每日数。	第 m 日陟降数：$g(m)=g(1)\pm\dfrac{(m-1)\Delta_k^2}{n^2}$
所历推定气日随算其数，陟加、降减其迟速，为各迟速数。	冬至后第 x 日迟速数：$f(x)=\sum_{1}^{k-1}\Delta_i+\sum_{1}^{m}g(s)$

其二，按理，初日陟降率 $g(1)$ = 初率 ± 半日差。但是，《皇极历》在 $\Delta_k<\Delta_{k+1}$ 时，加日差（别差）；在 $\Delta_k>\Delta_{k+1}$ 时，什么也没加。换句话说，它并非本气第一日太阳实行速与平行速之差的平均值，因此，当 $m=n$ 时，按照《皇极历》的算法

$$f(kn)=\sum_{1}^{k}\Delta_i+\frac{\lvert\Delta_k-\Delta_{k+1}\rvert}{2n}\neq\sum_{1}^{k}\Delta_i$$

出现了些微的误差。此问题为纪志刚指出。表 5-2 罗列了现存所有以等间距分段二次内插方式构造其日躔公式的历法，《麟德历》

①隋书律历志（卷 18）. 中华书局编. 历代天文律历等志汇编（6）. 北京：中华书局，1976，1938～1939。

②各气的长度 n = 汎总/日限（省略 10）。

与《应天历》的初日定率 $g(1)$ 是等价的，他们均没有考虑“半日差”问题。实际上，只是到了《崇天历》，历法家才给出了初日定率 $g(1)$ 的完整形式，在此之前的5部历法均省略了半日差，如果说这些历法统统出现了缺文现象，似乎不太可能。

因此，从史料记录来看，虽然《皇极历》已经明确创立了等间距二次内插算法的思想，并将其应用于历法计算，但是，在很长的时间内，人们都采用了它的一种近似形式。不过，尽管完全正确的等间距二次内插公式最早出现在《崇天历》中，并不是说迟至宋代历法家才意识到这个问题，由于对近似算法而言，半日差的区别并不影响大局，这恐怕就是隋唐的历法家忽略它们的主要原因。

表 5-2　采用等间距二次内插历法日躔术比较

历名	年代	$f(x)$	Δ_k	$\frac{\Delta_k^2}{n}$	$\frac{\Delta_k^2}{n^2}$	$g(1)$
皇极历	600	迟速数	陟降数	总差	别差	
麟德历①	664	消息数	躔差率（损益率）	总差	别差	$\frac{\Delta_k+\Delta_{k+1}}{2n} \pm \frac{\Delta_k^2}{n}$
崇玄历②	892	盈缩分	升降差	差	日差	$\frac{\Delta_k}{n} \mp \frac{\Delta_k^2}{2n} \pm \frac{\Delta_k^2}{n^2}$
应天历③	962	盈缩度分	损益率	合差	日差	$\frac{\Delta_k}{n} \mp \frac{\Delta_k^2}{2n}$
乾元历④	981	阴阳度	阴阳分	合差	日差	$\frac{\Delta_k}{n} \mp \frac{\Delta_k^2}{2n}$
崇天历⑤	1024	盈缩分	升降分	差率	日差	$\frac{\Delta_k}{n} \mp \frac{\Delta_k^2}{2n} \pm \frac{\Delta_k^2}{2n^2}$

①旧唐书历志（卷33）．中华书局编．历代天文律历等志汇编（7）．北京：中华书局，1976，2007。

②新旧唐书历志（卷30下）．历代天文律历等志汇编（7）．2351。根据《崇玄历》术文，初日定率中包含了“日差”，而不是“半日差”，可能是原文有误。

③④宋史律历志（卷68）．历代天文律历等志汇编（8）．2460。

⑤宋史律历志（卷72）．历代天文律历等志汇编（8）．2579。

续表

历名	年代	$f(x)$	Δ_k	$\frac{\Delta_k^2}{n}$	$\frac{\Delta_k^2}{n^2}$	$g(1)$
纪元历①	1106	先后数	盈缩分	合差	日差	$\frac{\Delta_k}{n}\mp\frac{\Delta_k^2}{2n}\pm\frac{\Delta_k^2}{2n^2}$
知微历②	1180	盈缩积	损益率	合差	日差	$\frac{\Delta_k}{n}\mp\frac{\Delta_k^2}{2n}\pm\frac{\Delta_k^2}{2n^2}$
庚午元历③	1220	盈缩积	损益率	合差	日差	$\frac{\Delta_k}{n}\mp\frac{\Delta_k^2}{2n}\pm\frac{\Delta_k^2}{2n^2}$

注：初日定率 $g(1)$：当 $\Delta_k>\Delta_{k+1}$ 时，取上面的符号；否则，取下面的符号。$\Delta_k^2=|\Delta_k-\Delta_{k+1}|$，$x=(k-1)n+m$，$n$ 表示一个平气的长度。

二、不等间距二次内插法

从牛顿内插公式的形式来看，不等间距的情形远比等间距复杂许多，这恐怕是一行《大衍历》中出现的不等间距分段二次内插算法之所以引人瞩目的主要原因吧。不过，我们即将看到，一行的不等间距内插算法，实在是刘焯算法的简单推广，几乎可以说不需要任何特别的技巧。

1. 典型的不等间距分段二次内插法

除《大衍历》(724)外，徐昂的《宣明历》(822)之日躔术亦采用与之雷同的算法，而且其表述更加简明。《宣明历》是以定气长度 n_k 将一回归年划分为 24 段，冬至(夏至)后某日太阳的中心差称为先后数 $f(x)$；冬至(夏至)后第 x_1 日与第 x_2 日的先后数之差 $f(x_2)-f(x_1)$，称为 x_2 距 x_1 之间的盈缩分。这两个术语的含义与《纪元历》同(表 5-2)。令 $f_k(m)$ 表示冬至后第 k 气内前 m 日的盈

①宋史律历志(卷 79). 历代天文律历等志汇编(8). 2802。

②金史历志(卷 21). 中华书局编. 历代天文律历等志汇编(9). 北京：中华书局，1976，3219。

③元史历志(卷 56). 历代天文律历等志汇编(9). 3457。

缩分，则冬至后第 $x=\sum_{1}^{k-1}n_i+m$ 日太阳中心差的计算公式为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k-1}\Delta_i+f_k(m)\text{（日）}$$

其中，$\sum_{1}^{k-1}n_i\leqslant x<\sum_{1}^{k}n_i$ 日，公式中各气的盈缩分 Δ_k 都是常数

$$\Delta_k=f(\sum_{1}^{k}n_i)-f(\sum_{1}^{k-1}n_i),k=1,2,3,\cdots$$

显而易见，对于任意指定的节气

$$f(\sum_{1}^{k}n_i)=\sum_{i=1}^{k}\Delta_i$$

是一定的。因此，函数 $f(x)$ 的构造，相当于函数 $f_k(m)$ 的构造。由于各个节气上的内插公式 $f_k(m)$ 的构建原理基本上是一样的，因此，为了进一步简化我们的讨论，无妨直接以冬至后第一个节气为例，来说明不等间距二次内插公式 $f_k(m)$ 的构建。此时 $k=1,x=m$，并且

$$f(x)=f_1(m),0\leqslant x<n_1$$

与等间距二次内插法的情形类似，一行也是将 $f(x)$ 构造成为一个等差级数：假令

$$g(x)=f(x)-f(x-1),1\leqslant x<n_1$$

表示冬至后第 x 日当日太阳实行度与平行度之差，则冬至后第 x 日太阳的中心差就是

$$f(x)=\sum_{m=1}^{x}g(m),1\leqslant x<n_1$$

如图 5-1 所示，v_0 表示太阳的平均运行速度，折线 $A_{i-1}C_i$ 表示不同节气内太阳视运动平均速度的变化。假定 $B_{k-1}B_k=n_k(k=1,2,\cdots)$，表示一个定气的长度，令

$$\square A_0B_1=\Delta_1,\square A_1B_2=\Delta_2$$

分别表示冬至后第一、二气（本气与后气）的盈缩分，即该气内太阳实际运行与平均运行距离之差。日躔术的主要思路就是通过本气与次气盈缩分 Δ_1 与 Δ_2，来构造本气内每一日盈缩分所形成的一个数列

$$g(1), g(2), g(3), \cdots$$

我们将《宣明历》日躔术原文逐句罗列如表 5-3 所示，并借助图 5-2，用符号给出相应的算法释义。根据表 5-3 所陈述的内容，可以知道，冬至后第 x 日中心差（气下先后数）应为

$$f(x) = \sum_{1}^{x} g(m) = \left(\frac{\Delta_1}{n_1} + \frac{\Delta^2}{2n_2}\right) \times x - \frac{\Delta^2}{2n_1 n_2} \times x^2 \quad (5\text{-}6)$$

其中，$0 \leqslant x < n_1$，$\Delta^2 = \frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2}\left(\frac{\Delta_1}{n_1} - \frac{\Delta_2}{n_2}\right)$。不难验证，当上式在自变量 x 分别取

$x = 0$ 时， $f(0) = 0$

$x = n_1$ 时， $f(n_1) = \Delta_1$

$x = n_1 + n_2$ 时， $f(n_1 + n_2) = \Delta_1 + \Delta_2$

因此，函数（5-6）是以 $x = 0, n_1, n_1 + n_2$ 为插值点所确定的不等间距二次内插公式。

表 5-3 《宣明历》不等间距二次内插法

《宣明历》原文①	算法释义（参见图 5-2）
凡刻法乘盈缩分，如定气而一，曰气中率。②	本气中率 $A_0B_0 = \frac{\Delta_1}{n_1}$，后气中率 $A_1B_1 = \frac{\Delta_2}{n_2}$
与后气中率相减，为合差。	合差 $A_1C_1 = \frac{\Delta_1}{n_1} - \frac{\Delta_2}{n_2}$
以定气乘合差，并后定气以除，为中差。	中差 $A_0D_0 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}\left(\frac{\Delta_1}{n_1} - \frac{\Delta_2}{n_2}\right) = \frac{\Delta^2}{2n_2}$
加、减气率为初、末率。	初率 $B_0D_0 = \frac{\Delta_1}{n_1} + \frac{\Delta^2}{2n_2}$，末率 $B_1D_1 = \frac{\Delta_1}{n_1} - \frac{\Delta^2}{2n_2}$
倍中差，百乘之，以定气除，为日差。	日差 $\frac{2A_0D_0}{B_0B_1} = \frac{\Delta^2}{n_1 n_2}$
半之，以加、减初、末，各为定率。	初日定率 $g(1) = \left(\frac{\Delta_1}{n_1} + \frac{\Delta^2}{2n_2}\right) - \frac{\Delta^2}{2n_1 n_2}$
以日差累加、减之，为每日盈缩分。	第 m 日盈缩分 $g(m) = g(1) - \frac{(m-1)\Delta^2}{n_1 n_2}$

①新唐书历志（卷 30 上）. 历代天文律历等志汇编（7）. 2319 ~ 2320。

②《宣明历》日躔术术文中提到的刻法 = 84 = 日法/100，此数是为了将日行度化为日行分，为简明起见，以下疏解术文时，我们不再专门注意此数的运算。

2.《大衍历》的不等间距二次内插法

那么，一行在其《大衍历》中的算法是如何构造的呢？我们借助图 5-3，将《大衍历》算法原文逐句释义，如表 5-4 所示。

表 5-4　《大衍历》不等间距二次内插法

《大衍历》原文①	算法释义(参见图 5-3)
以所入气并后气盈缩分，倍六爻乘之，综两气辰数除之，为末率。②	末率 $DC=\dfrac{\Delta_1+\Delta_2}{n_1+n_2}$，$D$ 为 B_0 B_2 之中点，
又列二气盈缩分，皆倍六爻乘之，各如辰数而一；以少减多，余为气差。	气差 $A_1C_1=\dfrac{\Delta_1}{n_1}-\dfrac{\Delta_2}{n_2}$
至后以差加末率，分后以差减末率，为初率。	初率 $B_0D_0=\dfrac{\Delta_1+\Delta_2}{n_1+n_2}+\left(\dfrac{\Delta_1}{n_1}-\dfrac{\Delta_2}{n_2}\right)=\dfrac{\Delta_1}{n_1}+\dfrac{\Delta^2}{2n_2}$
倍气差，亦倍六爻乘之，复综两气辰数除，为日差。	日差 $\dfrac{2A_1C_1}{B_0B_2}=\dfrac{2}{n_1+n_2}\left(\dfrac{\Delta_1}{n_1}-\dfrac{\Delta_2}{n_2}\right)=\dfrac{\Delta^2}{n_1n_2}$
半之，以加、减初、末，各为定率。	初日定率 $g(1)=\left(\dfrac{\Delta_1}{n_1}+\dfrac{\Delta^2}{2n_2}\right)-\dfrac{\Delta^2}{2n_1n_2}$
以日差至后以减、分后以加气初定率，为每日盈缩分。	第 m 日盈缩分 $g(m)=g(1)-\dfrac{(m-1)\Delta^2}{n_1n_2}$
乃驯积之，随所入气日加、减气下先后数，各其日定数。	$f(x)=\sum_1^x g(m)$

仔细分析《大衍历》术文，可以发现，一行的算法是先求出所求气的"末率"DC，与"气差"A_1C_1，然后得到其"初率"B_0D_0，最后根据"日差"，获得每日的盈缩分 $g(m)$，以及"先后定数"$f(x)$。

①新唐书历志(卷 28 上). 历代天文律历等志汇编(7). 2224。

②由于《大衍历》在进行太阳中心差的计算时，均将各定气长度化为以"时辰"为单位的数字，因此算法中反复出现"倍六爻(即 12)乘之"的步骤。如果我们仍然以"日"为定气的长度单位，则不必理会这个步骤。

《大衍历》算法与《宣明历》(表 5-3)的实质性差别只有一点，两者的“末率”不一样。

图 5-3 与图 5-2 基本相同，两图中相同的符号代表相同的意义。按图 5-3 所示，《宣明历》的“末率”就是高度 B_1D_1。但是，对于《大衍历》，其“末率”则为图中的高度 DC，其中点 D 为线段 B_0B_2 的中点。由于$\square A_0B_1=\Delta_1$，$\square A_1B_2=\Delta_2$，$B_0B_1=n_1$，$B_1B_2=n_2$ 而

$$\square A_0B_1+\square A_1B_2=B_0B_2\times DC$$

所以

$$DC=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{n_1+n_2}$$

又由图 5-3 可知，《大衍历》的气差为

$$A_1C_1=\frac{\Delta_1}{n_1}-\frac{\Delta_2}{n_2}=AD_0$$

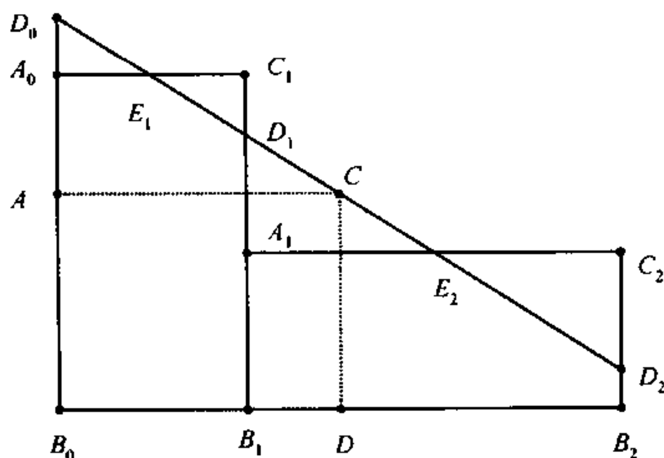


图 5-3　《大衍历》不等间距二次内插法

由此即得《大衍历》初率 B_0D_0 为

$$DC+AD_0=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{n_1+n_2}+\left(\frac{\Delta_1}{n_1}-\frac{\Delta_2}{n_2}\right)=\frac{\Delta_1}{n_1}+\frac{\Delta^2}{2n_2}$$

与《宣明历》结果殊途同归。因此，一行设计的不等间距分段二次插值算法的通式，即如式(5-6)所示。

一行的这个算法在唐代颇有影响，一直到徐昂的《宣明历》(822)还在使用。不过，可能是由于不等间距构造的插值函数在形式上要比等间距的情形复杂许多，因此在后来的历法中就逐渐被人们放弃掉了。

三、二次内插法的一般形式与数学背景

当我们以24节气划分一个回归年时，令 n_1 与 n_2 分别表示相邻两气的长度，Δ_1 与 Δ_2 是两个常数，分别表示太阳在这两个气（n_1 与 n_2）的运动过程中，实际运行距离与平均运行距离的差值。于是，为了计算太阳视运动的中心差，一行构造了如下形式的二次内插函数 $f(x)$

$$f(x) = \frac{x}{n_1} \times \Delta_1 + \left(1 - \frac{x}{n_1}\right) \times \frac{x}{2n_2} \times \Delta^2 \qquad (5\text{-}7)$$

式(5-7)与式(5-6)是等价的，其中，$0 \leq x < n_1$ 日，二次差分为

$$\Delta^2 = \frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2}\left(\frac{\Delta_1}{n_1} - \frac{\Delta_2}{n_2}\right)$$

当 $n_1 = n_2 = n$ 时，二次差分化为

$$\Delta^2 = \Delta_1 - \Delta_2$$

此时，式(5-7)的函数 $f(x)$ 即为刘焯的等间距二次内插公式(5-3)。由此可见，刘焯算法(5-3)是一行算法(5-7)的一个特例。因此，式(5-7)就是中国古代历法中之二次内插算法的一般形式。

在我们以《宣明历》为例，讨论典型的不等间距分段二次内插法的构造过程中，可以看出，不等间距二次内插算法的关键，是求中差 A_0D_0，由中差与中平率 A_0B_0，可以得到初率 B_0D_0、末率 B_1D_1，而中差的两倍被段日 B_0B_1 相除，便得日差；半日差以加初率，立得初定率 $g(1)$。有了初始项 $g(1)$ 及公差（日差），则每日盈缩分构成的等差数列 $g(m)$ 随之给出。对这个等差级数求和，便是所求

每日先后数$f(x)$的二次内插公式。整个算法的造术思想,几乎与刘焯的等间距二次内插算法完全相同。

简而言之,中国古代历法中分段二次内插算法的造术思路是由以下两个部分构成的:

首先,假定$0 \leqslant x < n_1$时,太阳的视运动实行速与平行速之差$g(x)$按等差数列布阵。于是,问题的第一步即如何根据实测值来构造这个等差数列

$$g(x) = f(x) - f(x-1)$$

其次,将此等差数列构成的等差级数求和

$$f(x) = \sum_{1}^{x} g(m)$$

因此,问题的第二步即如何导出这个等差级数的求和公式。

所以,中算家的分段抛物插值算法被分成了两个简单算法的叠加。在探索这两种算法的源流时,一方面要考虑到中算家具有构造这些算法的能力,另一方面也要注意他们在处理此类问题时的手段与习惯。关于等差数列的构造,《九章算术·均输章》"五尺金箠"[5]题称:

> 今有金箠,长五尺。斩本一尺,重四斤。斩末一尺,重二斤。问次一尺各重几何?

此问大意是说,有一根五尺长的金属棒,在棒首截下一尺,其重四斤;再在棒末截下一尺,其重一斤。若将它截为五段,每段均长一尺,问其重量各是多少。刘徽有注云:

> 按此术,五尺有四间者,有四差也。今本末相减,余即四差之凡数也。以四约之,即得每尺之差。以差数减本重,余即次尺之重也。为术所置,如是而已。

由上述文字可知,此问已知首项(本重)和末项(末重),由此构造一等差数列,以推求中间三段金属棒各自的重量。

由此可见,《九章算术》中等差数列的构造方法,是已知首项,再求出公差,然后以公差累减首项,便得等差数列中之任意项。这

种思路，与前述二次内插算法中求每日盈缩分 $g(x)$ 的程序几乎完全吻合，其对比，如表 5-5 所示。

表 5-5　刘徽与刘焯关于等差数列的构造

刘徽算法	刘焯算法
本重(首项) - 末重(末项) = 四差凡数	初率 - 末率 = 总差
$\frac{\text{四差凡数}}{\text{四间}(n)}$ = 差数(公差)	$\frac{\text{总差}}{\text{段日}(n)}$ = 日差(公差)
各尺重 $g(x)$ = 本重 - $(x-1)$ × 差数	每日率 $g(x)$ = 初率 - $(x-1)$ × 日差

而等差级数的求和公式，中算家更是早已掌握。《九章算术·盈不足》"今有良马"一问，对此即有明确记述：题问称，良马初日行 193 里，日增 13 里，问 15 日共行多少里。刘徽注称：

> 求良马行者，十四乘益疾里数而半之，加良马初日之行里数，以乘十五日，得十五日之凡行。（文献[5]，401～402）

其中，益疾里数 = 日增 13 里，即日差或公差，令以 d 表示。而初日之行里数 = 193 里，即初日行速(首项)，以 a_1 表示，第 m 日所行里数 $a_m = a_1 + (m-1)d$。令日数 $n = 15$，则前 x 日良马凡行里数 $f(x)$ 为

$$f(x) = \sum_{1}^{x} a_m = \left[a_1 + \frac{(x-1)d}{2}\right] \times x = a_1 x + \frac{d}{2} \times (x-1)x \tag{5-8}$$

此即等差数列 $\{a_m\}$ 的求和公式。① 由此可见，刘焯创立的二次内插算法的两个子算法在《九章算术》中业已具备，而刘焯构造这种算法的程序，亦均明显体现了非常传统的中国古算的思维特征。

①比较有趣的现象是，从目前可以找到的中算史料来看，中算家们在处理变速运动时，皆以日行速为均匀对待，《九章》中的"良马驽马"一问即是一例，这与古代历法中将每日太阳实行度视为当日行速的平均值是十分相像的。

四、分段二次插值结点处的连续性问题

对于刘焯的等间距分段二次内插法而言，日行速的变化在节气转换处有可能出现跳跃性间断。如图 5-4 所示，令

$$\Delta_k = \square A_{k-1}B_k, k = 1,2,3,4$$

表示相邻四段节气的升降分。E_k各为A_kF_{k+1}之中点，图中$C_{k-1}D_k$表示$B_{k-1}B_k$段上各日太阳实际运行速度的变化线。其中

$$\text{第二段末率}: B_2D_2 = \frac{\Delta_2 + \Delta_3}{2n}, \text{第三段初率}: B_2C_2 = \frac{3\Delta_3 - \Delta_4}{2n}$$

按理，应当使日行速的变化呈连续态，即不能出现C_2D_2这样的跳跃，于是要求

$$\frac{\Delta_2 + \Delta_3}{2n} = \frac{3\Delta_3 - \Delta_4}{2n}$$

由此可得

$$\Delta_2^3 = \Delta_3^2 - \Delta_2^2 = (\Delta_4 - \Delta_3) - (\Delta_3 - \Delta_2) = 0$$

也就是说，日躔表中所给出的升降分(Δ_k)应成等差数列，《皇极历》的陟降率(Δ_k)与《麟德历》的躔差率(Δ_k)均满足这样的条件，因而此二历每日太阳实行速的变化总体上仍然呈连续态，节气之交亦无间断。

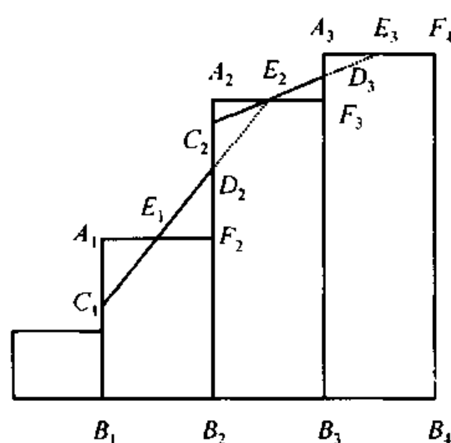


图 5-4　分段二次插值在结点处的间断

对于其他许多历法，情况就不是这样的了，它们在$B_{k-1}B_k$段上的日速变化常常会出现图 5-4 中斜线$C_{k-1}D_k$所表现的情形，在节气之交B_k处出现跳跃性间断(C_kD_k)。

这是分段二次内插法很难处理的一个问题，这种现象可能被一

行敏锐地察觉到了，于是他在《大衍历》月亮极黄纬的算法中进行了一次很奇特的尝试。一行的新算法，以前曾被认为是他已近似地掌握了三次内插公式的一个证据，实际上，这是一种误解。

在《大衍历》月亮运动的算法中，一行将白道度等分四个象限，各象限彼此对称，每象限长度为 90.94 度，等分为 6 段，每段约合 $n=15$ 度（就整），称为一爻，每爻加减率（Δ_k）皆以 120 为一度之分数，$\Delta_k/120$ 表示第 k 爻比 $k-1$ 爻月亮极黄纬（去黄道度）增加的度分。为了更清楚地说明《大衍历》月亮极黄纬算法的内容与意义，我们根据图 5-4 与图 5-5，以 $\Delta_k=\square A_{k-1}B_k$ 分别表示前爻（$k=1$）、本爻（$k=2$）、后爻（$k=3$）加减率，对《大衍历》原文逐句释义，构造 B_1B_2 段上的函数，如表 5-6 所示。

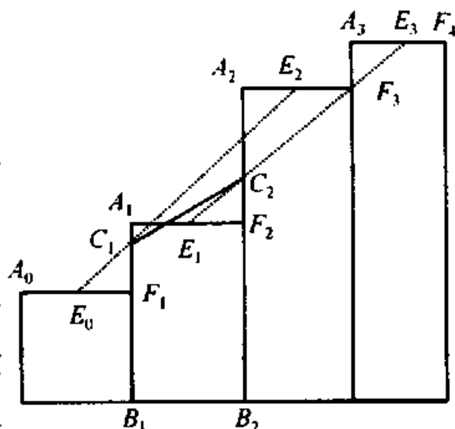


图 5-5　《大衍历》月亮极黄纬算法

表 5-6　《大衍历》月亮极黄纬算法

《大衍历》原文①	算法释义（参见图 5-5）
以其爻加减率与后爻加减率相减，为前差。	前差 $=\Delta_3-\Delta_2=\Delta_2^2$
又以后爻率与次后爻率相减，为后差。	后差 $=\Delta_4-\Delta_3=\Delta_3^2$
二差相减，为中差。	中差 $=\Delta_3^2-\Delta_2^2=\Delta_2^3$。令 $n=15=B_kB_{k+1}$
置所在爻并后爻加减率，半中差以加而半之，十五而一，为爻末率。因为后爻初率。	末率 $B_2C_2=\dfrac{\Delta_2+\Delta_3+\Delta_2^3/2}{2n}=\dfrac{3\Delta_2+\Delta_4}{4n}$

①新唐书历志（卷 28 下）．历代天文律历等志汇编（7）．2247。

续表

《大衍历》原文[①]	算法释义(参见图 5-5)
	初率 $B_1C_1=\frac{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_1^3/2}{2n}=\frac{3\Delta_1+\Delta_3}{4n}$
每以本爻初、末率相减,为爻差,十五而一,为度差。	度差 $=\frac{B_2C_2-B_1C_1}{B_1B_2}=\frac{3\Delta_1^2+\Delta_3^2}{2n^2}$
半之,以加减初率,为定初率。	定初率 $g(1)=\frac{3\Delta_1+\Delta_3}{4n}+\frac{3\Delta_1^2+\Delta_3^2}{4n^2}$
每以度差累加减之,各得每度加减定分。	每度定分 $g(m)=g(1)+(m-1)\times\frac{3\Delta_1^2+\Delta_3^2}{2n^2}$
乃循积其分,满百二十为度。各为月去黄道数及分。	月亮极黄纬 $f(x)=f(kn)+\sum_1^m g(s),x=kn+m$

最终所获结果月去黄道数 $f(x)$ 乃是以本爻第 m 度($x=kn+m$)为自变量的一个二次多项式函数,对于指定的第 k 爻,函数 $f(x)$ 中的首项

$$f(kn)=\sum_{i=1}^{k}\Delta_i$$

为常数,因此,函数 $f(x)$ 的主体乃是等差级数

$$\sum_1^x g(m)=\frac{3\Delta_1+\Delta_3}{4n}\times x+\frac{3\Delta_1^2+\Delta_3^2}{4n^2}\times x^2$$

的构造,而后者在形式上对于任意爻都是一致的。根据表 5-6 的释义,可以看出《大衍历》月亮极黄纬算法与刘焯二次内插算法有两点根本的不同:

其一,它以本段末率 B_2C_2 作后段初率(图 5-5),因此,各日加减率在两段相交处仍呈连续态;而刘焯算法则有可能如图 5-4 那样,使本段末率(B_2D_2)不等于次段初率(B_2C_2)。

其二,各段末率的选择方式上两种算法是不一样的,一行的算法是取 E_1E_3 与 A_2B_2 的交点为本段末率(B_2C_2,图 5-5);刘焯则取 E_1E_2 与 A_2B_2 的交点为本段末率(B_2D_2,图 5-4)。

不过,《大衍历》月亮极黄纬算法虽然使本爻末率与次爻初率相衔接,但却顾此失彼,常常有可能出现梯形 $B_1B_2C_2C_1\neq$ 矩形

$A_1B_1B_2F_2$的情况(图 5-5)。

总而言之,一行的这个算法是为修正刘焯二次插值算法在结点处产生的间跃而设计的,方法类似刘焯,但却并非二次内插法,更与过去认为的三次内插法无涉。

五、秦九韶的"缀术推星"

《数书九章·天时类》中的"缀术推星"是有关推算岁星视运动的一个问题,其题问大意是:已知岁星合伏 n_1 日,行 Δ_1 度;然后晨见 n_2 日,顺行 Δ_2 度,欲求合伏后 x 日内所行度数 $f(x)$。秦九韶给出的是一个不等间距二次内插公式,其造术步骤是:

首先,据 n_1、n_2 与 Δ_1、Δ_2,求出 n_1+n_2 日内岁星运行的加速度,即日差 d。

然后,求出合伏段第一日的岁星行速,即初行率 $g(1)=v_0$。由此所得每日行率 $g(m)$ 构成一等差数列。

最后,对这个数列构成的等差级数求和,即得合伏后每日行度公式。

整个思路与刘焯算法一致。有意思的是,秦九韶制定的求日差算法与前述诸法皆异:

> 术曰:以方程法求之。置见日(n_2)减一,余半之,为见率;以伏日(n_1)并见日为初行法;以法半之,加见率共为伏率。以伏日乘伏率为伏差,以见日乘见率为见差。以伏日乘见差于上,以见日乘伏差,减上,余为法。以见日乘伏度(Δ_1)为泛,以伏日乘见度(Δ_2)减泛,余为实。实满法而一,为度,不满退除为分秒,即得日差。[6]

上述文字给出了"日差"(公差)d 的算法。假设 n_1、n_2分别表示伏日、见日,Δ_1、Δ_2分别表示伏度、见度,则根据上述文字,可以得到日差

$$d = \frac{\Delta_1 n_2 - \Delta_2 n_1}{\frac{n_1 + 2n_2 - 1}{2} \times n_1 n_2 - \frac{n_2 - 1}{2} \times n_1 n_2}$$

这个数据是如何得到的呢？原来，为了求得日差 d，"缀术推星"建立了一个二元一次方程组，这个方程组是这样构造的：如图5-2所示，令 $B_{k-1}B_k = n_k$，□$A_{k-1}B_k = \Delta_k$，$k=1,2$。因为

$$\frac{\Delta_2}{n_2} = A_1 B_1$$

为见日（$B_1B_2 = n_2$）内岁星平行率，以日差 d 累减之，即可得其末日平行率

$$v_2 = B_2 D_2 + \frac{d}{2} = \frac{\Delta_2}{n_2} - \frac{(n_2 - 1)d}{2} \tag{5-9}$$

又，因为 $A_1B_1 = A_0B_0 - B_0B_2 \times d/2$，亦即

$$\frac{\Delta_2}{n_2} = \frac{\Delta_1}{n_1} - \frac{(n_1 + n_2)d}{2}$$

所以，式(5-9)又可表示为

$$v_2 = \frac{\Delta_1}{n_1} - \frac{[(n_1 + n_2) + (n_2 - 1)]d}{2} \tag{5-10}$$

联立两式(5-9)、(5-10)，可得

$$\left.\begin{aligned} n_2 v_2 &= \Delta_2 - \frac{n_2(n_2 - 1)d}{2} \\ n_1 v_2 &= \Delta_1 - \frac{n_1(n_1 + 2n_2 - 1)d}{2} \end{aligned}\right\}$$

求解上面的方程组，立得日差

$$d = \frac{\Delta_1 n_2 - \Delta_2 n_1}{n_1 n_2 (n_1 + n_2)/2}$$

"缀术推星"求初行率 v_0 的术文称：

求初行率：置初行法（$n_1 + n_2$），减一，余乘日差为寄。以半初行法乘寄，得数又加伏见度（$\Delta_1 + \Delta_2$），共为初行实。以法（$n_1 + n_2$）退除之，得合伏日初行率。

如图 5-2 所示，初行率 $v_0 = B_0D_0 - d/2$，表示合伏段第一天岁星平行率。因为

$$B_0D_0 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{n_1 + n_2} + \frac{(n_1 + n_2)d}{2}$$

所以有

$$v_0 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + (n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1)d/2}{n_1 + n_2}$$

初行率 v_0 与日差 d 既已求出，那么岁星在伏(B_0B_1)、见(B_1B_2)两段上每一日的行率即可按初行率累减日差获得。余与刘焯算法相同，不赘。

第二节　逐次分段抛物内插法

多项式插值法是数值逼近理论中最古老、最基本的算法，即使从公元 600 年刘焯创立等间距二次内插法算起，它的历史迄今也已 1400 年。由于高次多项式插值往往对被插函数并不收敛，因此，实践中人们常常选择分段内插法以构造次数较低的多项式插值函数，逐段逼近被插函数。不过，在被插函数无法明确表示，或不连续、不可导的情况下，要想预先确定适当的插值点及各个分段的长度，都是比较困难的。中国古代的历算家曾经发明了一种逐次分段抛物内插的算法，可以成功地解决分段内插时所遇到的这个问题。

一、边冈的黄赤道差算法

边冈是唐代著名的历算家，在他编制的《崇玄历》(892)中，出现了许多新颖别致的算法，对此后的历法产生了非常深远的影响，[7,8] 其中构造《崇玄历》黄赤道差算式所采用的逐次分段抛物内插法，就是他的几个创造性发明之一。

中国古代历法中的黄道度 l 与赤道度 x 皆自冬至点按天球上逆时针方向度量，它们与黄经 τ 和赤径 α 的关系分别为

$$l = \tau + \pi/2, x = \alpha + \pi/2$$

古人称

$$l - x = \tau - \alpha$$

为黄赤道差。由于黄赤道差 $\tau - \alpha$ 在4个象限互为对称，人们通常只考虑 $0 \leqslant l \leqslant \pi/2, 0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ 时的情形，古代历法基本上都假定黄赤道差在此象限内以 $x = \pi/4$ 为分点互为镜面对称。边冈《崇玄历》黄赤道差术文称：

> 凡冬至赤道日度及约余，以减其宿全度，乃累加次宿，皆为距后积度。满限九十一度三十一分三十七小分去之，余半已下为初，已上，以减限，为末。皆百四十四乘之，退一等，以减千三百一十五，所得以乘初、末度分，为差。又通初、末度分，与四千五百六十六先相减，后相乘，千六百九十除之，以减差，为定差，再退为分。①

中国古代不以360°划分一个圆周，而是以太阳在黄道上运行一周的日数表示一个周天的度分，《崇玄历》取一周天 $= 365\frac{5}{19}$ 度，合一象限

$$365\frac{5}{19}\text{度}/4 = 91.3157\text{度} \approx 91.32\text{度}$$

据术文，如果赤道度 $x \geqslant 91.3157$ 度则以 91.3157 度累减之，使之化为第一象限的情形，若 $0 \leqslant x < 45.66$ 度，称之为初限；若 $45.66 \leqslant x < 91.32$ 度，则以 91.3157 度减去 x，余数为在末限。总之，通过上述变换，将赤道度 x 化为 $0 \leqslant x < 45.66$ 度的情形进行计算。按术文所得“差”为

$$f_1(x) = \frac{(1315 - 14.4x)x}{100}(\text{分}) = \frac{(91.32 - x)x}{10\,000/14.4}(\text{度}) \qquad (5\text{-}11)$$

①新唐书历志（卷30下）. 历代天文律历等志汇编(7). 2352。

“通初、末度分”相当于取 $100x$，得

$$f_2(x)=\frac{(4566-100x)\times 100x}{100\times 1690}(\text{分})=\frac{(45.66-x)x}{1690}(\text{度}) \quad (5\text{-}12)$$

由此所得“定差”，即为所求黄赤道差 $(l-x)$

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x)(\text{度}) \quad (5\text{-}13)$$

其中，$0\leqslant x\leqslant 45.66$ 度。式(5-13)显系式(5-11)与式(5-12)的叠加。

如图 5-6 所示，$f_1(x)$ 无疑是被插函数的第一次逼近，$f_2(x)$ 则是对 $f_1(x)$ 的修正，是第二次逼近。式(5-11)与式(5-12)的构造非常相似，对于前者，它的两个端点分别为 $x=0,91.32$。要确定式(5-11)，只须在(0,91.32)内再选择一个插值点即可。当时的历家通常取

$$f(x)_{\max}=3\text{ 度}$$

如果令 $f_1(45.66)=3$ 度，则有

$$\frac{f_1(45.66)}{45.66\times(91.32-45.66)}=0.001\,439\approx\frac{14.4}{10\,000}$$

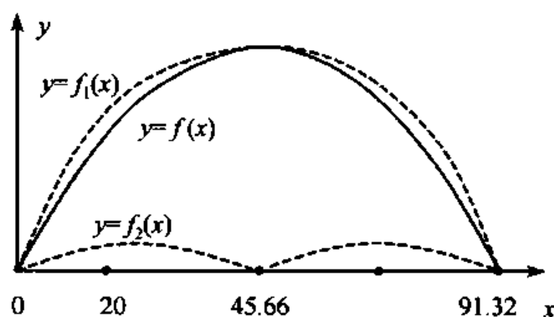


图 5-6　边冈的黄赤道差算法

由此立得式(5-11)。所以第一次逼近所取 3 个插值点分别为

$$x=0,45.66,91.32$$

以 $x=45.66$ 为分界点，将[0,91.32]分划为两段，由于古代历法家认为，这两个区间上的函数对称，因此，可只考虑[0,45.66]上的情形。我们可以选择[0,45.66]中间的某一点代入式(5-11)，

来考查它对被插函数逼近程度的好坏。

因《崇玄历》之前各部唐历均以每 5 度为限给出一黄赤道差值，我们取 $x=20$ 度时的情形与《大衍历》相比较，查《大衍历》此时黄赤道差 =1.75 度。① 由于

$$f_1(20)=\frac{20\times(91.32-20)}{10\,000/14.4}=2.0540\text{ 度}$$

于是得两者相差

$$2.0540-1.75=0.3040\text{ 度}$$

为修正 $f_1(x)$ 的这个误差，我们以 $x=0,20,45.66$ 为插值点，在[0,45.66]上构造一抛物函数

$$f_2(x)=\frac{(45.66-x)x}{b}$$

令 $f_2(20)=0.3040$，则有

$$b=\frac{20\times(45.66-20)}{0.3040}=1688\approx 1690$$

由此立即得式(5-12)。这就是边冈推导《崇玄历》黄赤道差算式(5-13)所发明的逐次分段抛物内插法。边冈的上述思想，不仅在《崇玄历》的月亮极黄纬算法中再次运用，而且对唐宋期间其他一些历法亦产生了十分明显的影响。[9]

二、边冈逐次分段抛物内插法

不难看出，式(5-12) $f_2(x)$ 的构造是非常有趣的。取[0,45.66]区间上 $x=20$ 为插值点，则 $f_2(20)=0.3040$ 不仅具有判别 $f_1(x)$ 在此区间上与被插函数 $f(x)$ 逼近程度好坏的功能，而且成为确定函数 $f_2(x)$ 的唯一参照数据。若如法炮制，在[0,20]上令

$$f_3(x)=\frac{(20-x)x}{c}$$

①新唐书历志(卷 28 上). 历代天文律历等志汇编(7). 2225 ~ 2226。

c为待定常数，在(0,20)上任取一点$x=x_0$作插值

$$f_3(x_0)=f(x_0)-[f_1(x_0)-f_2(x_0)]$$

则$f_3(x_0)$不仅成为第二次插值函数

$$f_1(x)-f_2(x)$$

与被插函数$f(x)$在[0,20]上逼近程度好坏的一个判断指标，而且立即可以确定常数

$$c=\frac{(20-x_0)x_0}{f_3(x_0)}$$

由此立即得[0,20]上的第三次修正函数

$$f_3(x)=\left\{f(x_0)-[f_1(x_0)-f_2(x_0)]\right\}\times\frac{(20-x)x}{(20-x_0)x_0}$$

这种逐次分段的抛物内插算法，适用于机械化的程序操作，在每一次分段时，插值函数与被插函数在新的插值点上的函数值之差，既可作为分段是否仍需进行下去的一个重要参数，也可同时给出下一轮分段抛物插值函数，这个过程可以在计算机上实现，自动识别界定插值函数的分段区间长度。

一般说来，假定$f(x)$为区间$[\alpha,\beta]$上的被插函数，已知$f(\alpha)$，$f(\beta)$，令

$$B_0(x)=f(\alpha)+\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$$

在(α,β)上任取一点$x_{1,1}$，得分划

$$\pi_1:\alpha=x_{1,0}<x_{1,1}<x_{1,2}=\beta$$

令
$$B_1(x)=B_0(x)+C_{1,1}(x-x_{1,0})(x-x_{1,2})$$

其中
$$C_{1,1}=\frac{f(x_{1,1})-B_0(x_{1,1})}{(x_{1,1}-x_{1,0})(x_{1,1}-x_{1,2})}$$

为常数，$x\in[\alpha,\beta]$。$B_1(x)$为$[\alpha,\beta]$上第一次分划π_1的抛物插值函数。对于第n次分划

$$\pi_n:\alpha=x_{n,0}<x_{n,1}<x_{n,2}<\cdots<x_{n,2^n}<\beta$$

共取2^n+1个结点，其中

$$x_{n,2i} = x_{n-1,i}, i = 0,1,2,\cdots,2^{n-1}$$

是第 $n-1$ 次分划 π_{n-1}所取的 $2^{n-1}+1$ 个插值点,而

$$x_{n,2i+1}, i = 0,1,\cdots,2^{n-1}-1$$

则为第 n 次分划时新取插值点。分划 π_n将$[\alpha,\beta]$分成 2^{n-1}段,各段分别为

$$x_{n-1,i} = x_{n,2i} \leqslant x \leqslant x_{n,2i+2} = x_{n-1,i+1}, i = 0,1,2,\cdots,2^{n-1}-1$$

皆为分划 π_{n-1}所界定的小区间。在这些小区间上分别取插值点 $x_{n,2i+1}$,令

$$B_n(x) = B_{n-1}(x) + C_{n,i}(x - x_{n,2i})(x - x_{n,2i+2})$$

其中,$C_{n,i} = \dfrac{f(x_{n,i+1}) - B_{n-1}(x_{n,2i+1})}{(x_{n,2i+1} - x_{n,2i+2})(x_{n,2i+1} - x_{n,2i})}, i = 0,1,2,\cdots,2^{n-1}-1$

我们把上述程序构造出来的分段连续二次函数 $B_n(x)$,称为$[\alpha,\beta]$上被插函数$f(x)$的第 n 次分段抛物插值函数。函数 $B_n(x)$是在 $B_{n-1}(x)$上叠加一些小区间端点上的函数值皆为零的抛物函数

$$C_{n,i}(x - x_{n,2i})(x - x_{n,2i+2})$$

其中,系数 $C_{n,i}$的计算一举两得:在判断 $B_{n-1}(x)$在本段上对$f(x)$的逼近效果的同时,亦将 $B_n(x)$在本段上的函数式确定并给出。常数 $C_{n,i}$的计算既不复杂,又不重复浪费。我们还可以规定,当某个区间上的$|C_{n,i}|$连续两次小于某个给定的正值 δ 时,此段上的分划可以停止,这样便可以大大简化计算的步骤。

我们把上述算法称为边冈逐次分段抛物内插法。

三、边冈抛物内插法的收敛性

作为一种数值逼近算法,边冈抛物内插法的存在性和唯一性都是显而易见的,那么它的收敛性如何呢?我们先看看下面的例子,令

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^n}{1-2^n}\left(x-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right), & \dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{4^n}\leqslant x<\dfrac{1}{2^{n-1}}\\ 0, & x=\text{其他}\\ 2^n\left(x-\dfrac{1}{2^n}\right), & \dfrac{1}{2^n}\leqslant x<\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{4^n}\end{cases}$$

此函数在[0,1]上连续,且

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0,f\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}\right)=\frac{1}{2^n},n=1,2\cdots$$

对于无穷序列,在考查其收敛性时,修改其中有限项的定义,并不影响其结果。故无妨当 $n=0$ 时,令 $f(x)=0$。现在我们给出[0,1]上的逐次分划 π_n

$$\pi_1:\ 0<\frac{1}{2}<1$$

$$\pi_2:\ 0<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<1$$

$$\pi_3:\ 0<\frac{1}{8}<\frac{1}{4}<\frac{5}{16}<\frac{1}{2}<\cdots<1$$

$$\vdots$$

$$\pi_{n+1}:\ 0<\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}<\frac{1}{2^{n-1}}<\cdots<1$$

$\forall n\in N$,总可以令 π_{n+1} 取

$$\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n},\frac{1}{2^{n-1}}$$

为 3 个相邻的插值点,因为

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)=0,f\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}\right)=\frac{1}{2^n}$$

所以,过 $x=\dfrac{1}{2^n},\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{4^n},\dfrac{1}{2^{n-1}}$ 三点的抛物线为

$$B_{n+1}(x)=\frac{2^n}{1-2^n}\times(2-3\times 2^n x+4^n x^2)$$

当 $x=\frac{3}{2^{n+1}}$ 时，$B_{n+1}(x)$ 取最大值，此时有

$$B_{n+1}\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right)=\frac{2^{n-2}}{2^n-1}\to\frac{1}{4},\text{而}\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right)=0$$

所以，$B_n(x)$ 不收敛于 $f(x)$。如果我们对分划 π_n 稍做一些限定，则有

定理　如果 $\exists h_0\in R^+$，且 $0<h_0<1$，使得 $[\alpha,\beta]$ 上的每次分划 π_n 都满足

$$\left|1-\frac{2(x_{n,2i+1}-x_{n,2i})}{x_{n,2i+2}-x_{n,2i}}\right|<h_0$$

并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_i(x_{n,2i+2}-x_{n,2i})=0$，则在分划 π_n 上产生的边冈抛物内插函数 $B_n(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于被插连续函数 $f(x)$。

证明　因为 $f(x)$ 连续，所以 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致连续。$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$，且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_i(x_{n,2i+2}-x_{n,2i})=0$ 可知，对同一个 ε，$\exists N_0>0$，使 $n>N_0$ 时，对任意 i 及 $x\in[x_{n,2i},x_{n,2i+2}]$ 必有

$$|x-x_{n,2i}|\leqslant|x_{n,2i}-x_{n,2i+2}|<\delta$$

于是

$$\begin{aligned}|B_n(x)-f(x)|&<|f(x)-f(x_{n,2i})|+|f(x_{n,2i})-B_n(x)|\\&\leqslant\varepsilon+|B_n(x_{n,2i})-B_n(x)|\end{aligned}$$

如果能够证明，存在一个与 n 无关的正数 M，使得 $\forall x\in[x_{n,2i},x_{n,2i+2}]$ 皆有

$$\begin{aligned}&\min_{j=0,1,2}|B_n(x)-B_n(x_{n,2i+j})|\leqslant M\cdot\\&\max_{j,k=0,1,2}|B_n(x_{n,2i+k})-B_n(x_{n,2i+j})|\end{aligned}$$

则命题即获证明。上式的意思是，对于过任意给定的 3 点 A,B,C 的抛物线，必存在如下关系：抛物线段 AC（B 点在 A,C 之间）上任意一点的函数值与 A,B,C 三点函数值之差的绝对值之最小者，必

定不大于 A,B,C 三点函数值之差的最大者的 M 倍。

不失一般性,假令 $A(0,0),B(h,b),C(1,c)$,且

$$|h-0.5|<h_0<0.5$$

过 A,B,C 三点的抛物线为

$$g(x)=\frac{(ch^2-b)x-(ch-b)x^2}{h^2-h}$$

取 $M=\dfrac{16}{1-4h_0^2}$,则

$$\left|\frac{1}{h^2-h}\right|=\frac{1}{0.25-(h-0.5)^2}<\frac{1}{0.25-{h_0}^2}=\frac{M}{4}$$

由此即得

$$|g(0)-g(x)|=|g(x)|\leqslant\frac{M}{4}\cdot[|ch^2-b|+|ch-b|]$$

$$\leqslant M\cdot\frac{|c|+|b|}{2}\leqslant M\cdot\max\{|g(h)-g(0)|,|g(1)-g(0)|\}$$

至此定理得证。

四、插值余项与精度估计

假定被插函数 $f(x)\in C^3[\alpha,\beta]$,则对于抛物内插函数 $B_n(x)$ 在 $x\in[x_{n,2i},x_{n,2i+2}]$时有插值余项[10]

$$R_n(x)=f(x)-B_n(x)=\frac{f'''(\zeta)}{3!}\prod_{0}^{2}(x-x_{n,2i+j})$$

$\zeta\in[x_{n,2i},x_{n,2i+2}]$,因为 $f(x)\in C^3[\alpha,\beta]$,所以 $f'''(x)$ 在$[\alpha,\beta]$上一致有界,即 $\exists M_0>0$,使

$$|f'''(x)|<M_0,x\in[\alpha,\beta]$$

以下我们只需估计多项式 $\prod\limits_{j=0}^{2}(x-x_{n,2i+j})$ 的范围即可。作函数

$$g_0(x) = x(x-h_1)(x-h)$$

其中，$0\leqslant x\leqslant h, 0<h_1<h$，且$\left|\frac{2h_1}{h}-1\right|<h_0<1$。令$\frac{x}{h}=t,\frac{h_1}{h}=\theta$，则有

$$g_1(t) = t(t-\theta)(t-1)$$

其中，$0\leqslant t\leqslant 1,\frac{1-h_0}{2}<\theta<\frac{1+h_0}{2}$。由$g'_1(t)=0$，得方程

$$3t^2-2(\theta+1)t+\theta=0$$

解得两个实根

$$t_{\pm}=\frac{\theta+1\pm\sqrt{\theta^2+1-\theta}}{3}\in(0,1)$$

令$\Delta=\sqrt{\theta^2+1-\theta}$，则

$$g_1(t_{\pm}) = \frac{1}{27}[(\theta+1)(1-2\theta)(\theta-2)\mp 2\Delta^{\frac{3}{2}}]$$

当$\frac{1-h_0}{2}<\theta\leqslant\frac{1}{2}$时

$$\max_{t\in[0,1]}|g_1(t)| = |g_1(t_+)| = \frac{1}{27}[(\theta+1)(1-2\theta)(2-\theta)+2\Delta^{\frac{3}{2}}]$$

当$\frac{1}{2}\leqslant\theta<\frac{1+h_0}{2}$时

$$\max_{t\in[0,1]}|g_1(t)| = |g_1(t_-)| = \frac{1}{27}[(\theta+1)(2\theta-1)(2-\theta)+2\Delta^{\frac{3}{2}}]$$

所以

$$|g_1(t)|\leqslant\frac{1}{27}[2\Delta^{\frac{3}{2}}+(\theta+1)(2-\theta)|2\theta-1|]$$

$$=\frac{2}{27}\left[\left(\frac{3}{4}+\left(\theta-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{9}{4}-\left(\frac{1}{2}-\theta\right)^2\right)\left|\theta-\frac{1}{2}\right|\right]$$

因为$\left|\theta-\frac{1}{2}\right|<\frac{h_0}{2}$，所以有

$$|g_1(t)|\leqslant\frac{1}{27\times 4}[(3+h_0)^{\frac{3}{2}}+9h_0]$$

于是，对于$[\alpha,\beta]$上的分划π_n，如果满足

$$\left|1-\frac{2(x_{n,2i+1}-x_{n,2i})}{x_{n,2i+2}-x_{n,2i}}\right|<h_0<1, i=0,1,2,\cdots,2^{n-1}-1$$

则有
$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M_0}{3!}\cdot\frac{h_1^3}{27\times 4}[(3+h_0)^{\frac{3}{2}}+9h_0]$$

其中，$h_1=\max_i|x_{n,2i}-x_{n,2i+2}|$。对于等间距逐次分段的情形，$h_0=0$，于是

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^3M_0\sqrt{3}}{27\times 8^n}$$

此时各段长度$h_1=\frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}}$。

第三节 《天文大成管窥辑要》中的边冈算法

一、黄鼎与《天文大成管窥辑要》

《天文大成管窥辑要》是明末清初黄鼎穷毕生心力于从军生涯之余编辑而成的一部著作。黄鼎生卒年不详，据《国朝先正事略》卷44记载：

> 黄鼎，清六安人，字玉耳。明末以诸生从军，积功至总兵官，后降洪承畴，官至提督。[11]

因此，有些书目提要中，也称“明黄鼎”。该书初版于清代顺治癸巳年(1653)，书前有大学士范文程(1597～1666)序。由黄鼎自序撰于1652年判断，其定稿当在1652年之前。该书上至羲皇，下迄清初，参考典籍143种，其“纂列”第一条称：

> 是集搜自行世之典，字字悉本正史，如见于稗野及小说中，概置不录，惧其滋诬，且长伪也。[12]

由此可见,该书并非黄鼎臆创,应具有较高的史料价值,庶可征信。或许因此之故,《畴人传》并未将黄鼎视为历算家而予以列传。据《四库全书学典》称:

> 《天文大成管窥辑要》八十卷,清黄鼎撰。以古今天文占候分门编录,大旨主灾祥而不主推步,繁称博引,多参以迂怪荒唐之说。术数存一。(文献[11],贰-45)

可能因其"多荒唐之说",《四库全书》才未收录此书,仅在"四库全书存目"中将其列入术数类名单。该书的特点是"遍搜历代天文诸书,辑其关要,条分类聚,汇为一帙"。其缺点是"惟其如许大帙,犹沿明人气习,详其出处者甚鲜,殊无裨于考证。"[13]

诚如批评家所言,该书对历算部分收录的内容相较而言不多,仅在第三、七、八、十及十二卷中有所论述,约占全书篇幅的5%。但通过对这些历算内容的分析解读,可以发现唐、宋、元历法中一些重要算法中鲜为人知的构造原理。

近年来,随着越来越多的古历算法被清理发掘,人们已开始关注这些众多算法的构建方法,但是由于现存史料往往只叙述算法程序或公式,很少论及造术思想,因而对研究者造成了很大障碍,也产生了各种各样的推测,众说纷纭,莫衷一是。《天文大成管窥辑要》中的历算史料,将极有助于澄清一些重要算法的疑难问题。兹将笔者认为有新意的内容举要如下。

第三卷,论中晷差:首次披露边冈《崇玄历》晷影公式的造术思路,此算法给出了中国历史上第一例三次函数,一直被人们认为是《授时历》平立定三次插值法的前驱;论黄赤道差:首次指出边冈公式及其后宋代诸历此项算法的构建方法;论白与黄、赤道差:首次详述《授时历》白道交周算法的构建步骤。

第八卷,论日躔盈缩差:论述《授时历》平立定三次内插算法之构成,比《明史历志》更明晰。

第十二卷,五星常变差:首次论述郭守敬平立定三差的几何构造方法,由此基本可以推定《授时历》三次内插算法的造术原理。

《天文大成管窥辑要》在国内天算史界似乎影响甚微，几乎未见有专门的研究论著出现。但它出版不久，即东传日本，且引起关孝和（? ~1708）等一批和算家的关注。关氏在研究《授时历》三次内插法时，便利用了该书第八卷的材料，[14]并通过对第三卷有关内容的研究，撰著了《天文大成三条图解》，细论"黄赤道差"、"黄赤内外差"、"白道与黄赤道差"，此书1680年（延宝庚申）出版，1758年（宝历八年）千叶岁胤出版《天文大成真遍三条图解》。（文献[14]，261，86）

另外，中根元圭（1662~1733）与本多利明（1743~1812）等著名和算家亦钻研过《天文大成管窥辑要》，（文献[14]，Ⅲ，83）后者还撰有《再订三条图解》。（文献[14]，Ⅳ，191）

可惜笔者未能查到这些和算家的原著。现在东京大学与京都大学仍藏有顺治十年（1653）出版的《天文大成管窥辑要》（以下为行文方便，一律简称《天文大成》）。[15~16]

1984年，台湾老古文化事业公司根据云林阁刊本影印再版《天文大成》，本文将据此，对部分迄未详于现存史志的一些历算内容进行讨论。

二、黄赤道差算法

就算法而言，中国历法史上自刘焯首创分段二次插值法之后，另一个影响深远的就要数所谓的"相减相乘法"。相减相乘法中最常见的一类函数形如下式

$$f(x)=\frac{(2a-x)x}{b} \qquad (5\text{-}14)$$

其中，定义域为$0\leqslant x\leqslant 2a$，通常取a为一象限之长度，b为某待定常数。式(5-14)之构造非常简单，$f(0)=f(2a)=0$，因此，只须在$(0,2a)$内任取一点作插值点，即可确定b值。这是确定二次抛物插值函数最简明的一种方法。这种算法最早出现于曹士蔿的《符天历》(780)，[17]

边冈更将其发扬光大，创立了逐次分段抛物插值算法。

1. 边冈的黄赤道差算法

在第二节中我们讨论了边冈在其《崇玄历》中创设的黄赤道差公式为

$$f(x)=\frac{(1315-14.4x)x}{10\,000}-\frac{(45.66-x)x}{1690} \qquad (5\text{-}15)$$

的构建方法，现在可以从《天文大成》中得到进一步的印证：

> 自后，边冈《崇玄》立相减相乘之法以求之，其术以初末限除差度，而又并限以立为差法也。《崇玄》差度三，以限四五六六除之，得六百五十(八)[七]，又以限除之，得一百四十四。倍限所除之数，得一千三百一十五，立为差法。以一百四十四乘限，所得退一等，以减千三百一十五，又乘限度分为差。(文献[12]，卷3，12)

以上术文，是在讲述式(5-15)中第一项的构造。中国古历按恒星年长度划定周天度数，每象限约合91.32度，因黄赤道差在两分两至点皆为0，由对称性，只须考虑某一象限的黄赤道差即可。又假定在一象限内其黄赤道差亦呈镜面对称，则推知其差最大值必在象限之中点，即$x=45.66$度处，此差值即为度差

$$f(45.66)=3\text{ 度}=30\,000\text{ 分}$$

由于$30\,000/45.66=657=45.66\times14.4$，所以有

$$\text{差法}=2\times45.66\times14.4=1315\text{ 分}$$

若以符号表示，令$a=45.66$表示一象限之半，(即术文所称的“限”)$f(a)=m=3$度，表示$f(x)$在$[0,2a]$上之最大值，则差法$=2m/a$，而

$$f(x)=\left(\frac{2m}{a}-\frac{mx}{a^2}\right)x=\frac{(1315-14.4x)x}{10\,000}\text{ 度}$$

所以$f(0)=f(2a)=0$，$f(a)=m$，是为二次函数$f(x)$的三个插值

点及其函数值。事实上,因为 $f(0)=f(2a)=0$,所以 $f(x)$ 必如式(5-14)。又 $f(a)=m$,所以

$$b=a^2/m, \text{差法}=2a/b=2m/a$$

2. 宋代历法的黄赤道差算法

宋代《崇天历》(1024)没有沿袭边冈的逐次分段抛物插值思想构造其黄赤道差算法,而是根据一行《大衍历》(724)的数据,推导出一个二次解析表达式,给出了不同于式(5-14)的相减相乘函数,其主要差别在于,新算法并不直接取定义域两端的函数值皆为零。据《天文大成》记载:

> 《崇天》差度三,以度法一千二百乘之,得三千六百,以初末限四十五除之,得八十,加限数,故得差法一百二十五;《观天》差度三,以度法一万二千乘之,得三万六千,以三乘限,除之,得二百六十五,加限一百三十五,其得差法四百;《庚午》差二度五十二分,以限四十五除之,得五十六,并限得一百一为差法。皆以差法与限相减相乘而得差度。《崇天》术即《大衍》也。《观天》比《崇天》但加三乘限分,以求合于度法耳。《庚午》法同《崇天》,其黄赤差则减半度矣。(文献[12],卷3,13)

按此术文,假定:差法 $=c$,度法 $=d$,则宋代历法的黄赤道差算法皆可表示为

$$f(x)=\frac{(c-x)x}{d} \tag{5-16}$$

设 a 为初末限(在此即为一象限之半,约取45度,唯《观天历》取3×45度),差度 $=m$,即黄赤道差之最大值 $f(a)=m$。于是

$$\text{差法}=c=a+md/a$$

比较式(5-14)之差法 $2a$,可知此处差法与定义域无线性关系。由于 a 与 m 都是已知的,因此,确定式(5-16)的关键,就在于选择度法 d。一旦度法选定,则根据

$$c = a + \frac{md}{a}$$

可将差法 c 确定。从算理上看,这个过程是不错的。我们很容易利用术文,导出《崇天历》、《观天历》(1092)[①]、《庚午元历》(1220,此历实继承《纪元历》之算法)的黄赤道差公式。今以《庚午元历》为例说明之:令

$d = 1000, a = 45, m = f(a) = 2.5$(此差度比《崇天》减半度)

按 $md/a = 2.5 \times 1000/45 \approx 56$,调整差度 $m = 56a/d = 2.52$,所以

$$c = 56 + 45 = 101$$

于是

$$f(x) = \frac{(101 - x)x}{1000}$$

另外,对于周琮《明天历》,似亦可如此推导:令 $d = 1000, a = 45.655\ 45$(为一象限 91.3109 度之半),$m = f(a) = 3$,则 $c = a + md/a = 111.37$,故

$$f(x) = \frac{(111.37 - x)x}{1000}$$

这种算法模式,脱胎于对《大衍历》黄赤道差的解析化,而《崇天历》一旦将其模式化,其构造步骤随之形成。严格说来,《崇天历》之后的宋代历法之黄赤道差算法,与插值法基本无关,其算法精度的高低,主要取决于这样两点:其一,度法 d 选择的是否合适;其二,差度 $m = f(a)$ 测定的是否精确。前者可以通过一定的试算而予以定夺,后者则在总体上把握了式(5-16)的精度。

---

①按《宋史律历志》(卷 77)的记载,《观天历》"求二十八宿黄道度"算法的黄赤道差函数为

$$f(x) = \frac{3x(c - 3x)}{d}$$

其中,度法 $d = 12000 \approx$ 日法 $A = 12030$。初末限 $a = 45.66$ 度,差度 $m = f(a) = 3$ 度,由此即得其差法

$$c = 3a + \frac{md}{3a} = 400$$

这就是《观天历》黄赤道差公式的来历。

三、立方相减相乘算法

边冈在《崇玄历》中设计的晷影算法，构造了中国历史上第一例三次多项式函数，史称"立方相减相乘算法"。近现代天算史家常常将中国古代的三次插值法之源追溯至边冈此一算法，如《畴人传》即有如下评论：

> 相减相乘，与入限自乘，其加减皆如平方。后世造术如求黄道宿度、晷漏消息及日食东西南北差数，皆以此法入之；即《授时》平立定三差，亦由是加精。[18]

如所周知，中国古代历法家通常仅仅以文字的形式陈述各种算法应用到的函数，但是一般情况下，并不告诉我们这些函数是如何构造出来的，在正史中，也很难找到当时的历算家建立这些算法的数理根据。因此，探讨历史上出现的各种算法的构造原理与步骤，便成为天算史研究中的一项重要内容。

我们知道，三次插值算法的构造结果，通常即为某个三次函数，但事实上，根据对《天文大成》中有关内容的分析，我们发现，边冈的立方相减相乘算法与三次内插法并无关系。

《崇玄历》(892)晷影计算法是分别以冬、夏至为起点的两个类似的三次多项式函数，按陈美东的疏解，[19]《崇玄历》太阳每日正午以8尺圭表所计算的晷影算式分别如下：

第一，当冬至前后 $x<59$ 日时，影长 $f_1(x)$ 为

$$f_1(x)=12.7150-(2195-15x)x^2\times10^{-6}\text{尺} \tag{5-17}$$

第二，当夏至前后 $x<123.622\,25$ 日时，影长 $f_2(x)$ 为

$$f_2(x)=1.4780+(4880-4x)x^2\times10^{-7}\text{尺} \tag{5-18}$$

其中，$59+123.622\,25=182.622\,25$ 日，正好是《崇玄历》回归年长度之半。那么，公式(5-17)与(5-18)究竟是如何构造出来的呢？这一点，边冈没有交待。前人虽有种种推测，但是，均缺乏史料的支持。在《天文大成》第三卷"论中晷差"中，我们发现了如下文字：

边冈作《崇玄》,以去冬夏(以)[两]至日辰多寡立为初末限,以立方相减相乘之法以求之:

置冬至晷影,以限日除之[退两等],得差法。又以冬至晷影减雨水晷影。余以限自而除之,得减差法,余为汎差积。又以限除之,得日汎差。

置雨水晷影八尺二寸,减夏至晷影,余以限日自而除之(得差法),又以限日自而除之,退一等[并之,得差法。又以限日自而除之],以减差法,余为汎差。又以限除之,得日汎差。

故求法以所入限副之,以乘[日]汎差,得减差法,余为定差。再乘其副,得晷影差。冬至后减,夏至后加,得所求限晷影定数。[①]

宋《仪天》、《崇天》皆仍其法,《崇天》惟以限自而除影余,并限为差,法之稍异耳。(文献[12],卷3,7~8)

根据上述文字,假令 w、r、s 分别表示冬至、雨水与夏至的晷影长度,$f_1(x)$表示冬至前后 $x<d_1$ 日的影长,d_1表示冬至到雨水的日数,即冬至后初限;令 $f_2(x)$表示夏至前后 $x<d_2$ 日的影长,d_2表示雨水至夏至的日数,即冬至后末限。由前引术文的第2段,[②]可知:当冬至前后 $x<d_1$时,有晷影公式

$$f_1(x) = w - \left[\frac{w}{100d_1} - \left(\frac{w}{100d_1^2} - \frac{w-r}{d_1^3}\right)x\right]x^2 \qquad (5\text{-}19)$$

其中,$\frac{w}{100d_1}$ = 差法,$\frac{w}{100d_1} - \frac{w-r}{d_1^2}$ = 汎差积,$\frac{w}{100d_1^2} - \frac{w-r}{d_1^3}$ = 日汎差。容易验证

$$f_1(d_1) = r$$

这表明按式(5-19)计算,则雨水日(冬至后第 d_1 日)影长 $f_1(d_1)$ 与实测

①凡引文中衍误之字,皆以()括之,并以[]标示原文脱夺之字。

②按此段所增"退两等"三字,在古历算术文中常有省略,增补的用意,为避免对术文的误解。

值r相等。我们知道,n次内插法,通常应在插值函数定义域内选择$n+1$个插值点,对于三次函数来讲,如果它得自插值法,则至少应有4个插值点。但实际上,由式(5-19)判断,只有

$$f_1(0)=w \text{ 与 } f_1(d_1)=r$$

这两个点的值与实测吻合,因此,它显然不是插值法的结果。

又,根据第3段术文,[①]可知,当夏至前后$x<d_2$时,有晷影公式

$$f_2(x)=s+\left[\left(\frac{r-s}{d_2^{\ 2}}+\frac{r-s}{10d_2^{\ 2}}\right)-\frac{r-s}{10d_2^{\ 3}}x\right]x^2 \qquad (5\text{-}20)$$

其中,差法$=\frac{r-s}{d_2^{\ 2}}+\frac{r-s}{10d_2^{\ 2}}$,日汎差$=\frac{r-s}{10d_2^{\ 3}}$。容易验证

$$f_2(0)=s,f_2(d_2)=r$$

实际上,式(5-20)仅通过夏至与雨水两日之影长确定的,因此,也不是插值法的结果。

假令α表示差法,β表示日汎差,则原文称

$$\text{定差}=\alpha-\beta x$$

而晷影系由晷影差

$$w-f_1(x)=(\alpha-\beta x)x^2$$

或

$$f_2(x)-s=(\alpha-\beta x)x^2$$

而得。事实上,"定差"一定,则晷影公式$f_1(x)$与$f_2(x)$便同时确定。因此,$f_1(x)$与$f_2(x)$的推求,是通过下述途径完成的

$$\frac{w-f_1(x)}{x^2}=\alpha-\beta x \qquad (5\text{-}21)$$

或

$$\frac{f_2(x)-s}{x^2}=\alpha-\beta x \qquad (5\text{-}22)$$

亦即当x以日为单位连续取值时,令

$$\frac{w-f_1(x)}{x^2} \quad \text{或} \quad \frac{f_2(x)-s}{x^2}$$

①原文不通,原因是印书者抄录此段时,因跳行而漏写了一句术文.今按算理校补。

呈等差数列变化，其初始项为差法 α，其公差即日差 β。于是，《崇玄历》晷影公式(5-19)与公式(5-20)的构建，归结为这样两个步骤：

(1)建立算法模型(5-21)、(5-22)；

(2)构造等差数列 $\alpha-\beta x$。

我们曾经指出，刘焯创立的二次内插法是由这样两个子算法构成的：

(1)构造一个等差数列；

(2)求其等差级数之和。

李继闵最先发现，其中第一步算法已出现在《九章算术》的有关算题中，均输章的"五尺金箠"等题，就是中算家构造等差数列的例子。因此，构造等差数列，对中算家而言，不成问题。因为

$$f_1(d_1) = r$$

所以，如果差法 α 选定，则日差（日沉差）β 按式(5-21)即为

$$\beta = \left(\alpha - \frac{w-r}{d_1^2}\right)\frac{1}{d_1}$$

因此，第二段原文称

$$\text{汎差积} = \alpha - \frac{w-r}{d_1^2} = \text{差法} - \text{影余除限自乘}$$

又，对于夏至前后的情形，因为

$$f_2(d_2) = r$$

所以，如果差法 α 选定，则日差（日沉差）β 按式(5-22)，即为

$$\beta = \left(\alpha - \frac{r-s}{d_2^2}\right)\frac{1}{d_2}$$

因此，第三段原文称

$$\text{汎差(积)} = \alpha - \frac{r-s}{d_2^2} = \text{差法} - \text{影余除限自乘}$$

由此可见，晷影公式(5-19)与公式(5-20)之构建的关键步骤，除了确定其算法模型(5-21)、(5-22)之外，就是如何确定差法 α。

四、立方相减相乘算法的构建原理

根据前文的讨论,我们已经了解了边冈在《崇玄历》晷影算法中创立的立方相减相乘函数的结构分别如式(5-19)、式(5-20)所示。进一步的问题是:边冈为什么要利用式(5-21)、式(5-22)来构建其晷影函数? 其物理意义是什么? 另外,式(5-21)、式(5-22)中的差法,即欲构造之等差数列 $\alpha-\beta x$ 之初始项,是如何选定的?

1.《崇玄历》晷影公式的构建

按照《天文大成》记述,边冈算法在冬至前后的晷影公式$f_1(x)$中取差法

$$\alpha = \frac{w}{100d_1}$$

此数如何导出,已无从查考。我们可以猜测如下:已知冬至影长 $w=12.715$尺,雨水影长 $r=8.2$ 尺,假定取冬至与雨水中间的大寒影长 $c=11.22$ 尺,[①]由式(5-21)知

$$f_1(0)=w,\ f_1(d_1/2)=c,\ f_1(d_1)=r$$

所以,有

$$\alpha=\frac{8(w-c)-(w-r)}{d_1^{\ 2}}=\frac{7.455}{d_1^{\ 2}}=\frac{12.62}{100d_1}$$

由于$\frac{12.62}{100d_1}\approx\frac{w}{100d_1}$,故差法取之。夏至前后的情形亦可类似导出:令夏至晷影 $s=1.4780$ 尺,雨水晷影 $r=8.20$ 尺,取二节气中间的谷雨晷影 $g=3.30$ 尺,[②]由

$$f_2(0)=s,\ f_2(d_2/2)=g,\ f_2(d_2)=r$$

---

①《大衍历》大寒的晷影长度为 $c=11.2182$ 尺,见:新唐书历志(卷28上).历代天文律历等志汇编(7).2236。

②《大衍历》谷雨的晷影长度为 $g=3.3047$ 尺。

易得 $$\alpha=\frac{8(g-s)-(r-s)}{d_2^{\,2}}=\frac{7.89}{d_2^{\,2}}\approx\frac{11(r-s)}{10d_2^{\,2}}$$

由此即得夏至前后晷影公式如式(5-20)所示。

根据前面的讨论,在假定算法模型式(5-21)、式(5-22)成立的前提下,差法 α 一定,则晷影函数式(5-19)、式(5-20)即刻得出。

现在的问题是,由此得到的式(5-19)、式(5-20)与式(5-17)、式(5-18)是否吻合呢? 我们取冬至距雨水定气 $d_1=58.70$ 日,令 $w=12.7150$ 尺,$r=8.2$ 尺,代入式(5-19),则有

$$f_1(x)=12.7150-(2166-14.5x)x^2\times10^{-6}$$
$$=12.7150-[(2166+0.5x)-15x]x^2\times10^{-6}\text{尺}$$

令 $x=d_1=58.70$,则差法

$$\alpha=2166+0.5d_1\approx2195$$

由此即获式(5-17)。将雨水距夏至定气时间 $d_2=123.91$ 日及 $s=1.4780$ 尺,$r=8.20$ 尺代入式(5-20),有

$$f_2(x)=1.4780+(4816-3.5x)x^2\times10^{-7}$$
$$=1.4780+[(4816+0.5x)-4x]x^2\times10^{-7}\text{尺}$$

令 $x=d_2=123.91$ 时,则差法

$$\alpha=[4816+0.5x]=4878\approx4880$$

由此即获式(5-18)。

宋代《仪天历》① 与《崇天历》② 的情形与《崇玄历》类似,不难验证,它们也是按照上面的步骤,通过式(5-19)与式(5-20)的数学模型而建立起来的。

2. 边冈立方相减相乘算法模型试探

现在我们来讨论边冈选择式(5-21)与式(5-22)来构建其晷影公式的物理意义,边冈为什么要令影差的变化与入限日 x 之平方的比值

---

①宋史律历志(卷69).历代天文律历等志汇编(8).2486~2487。

②宋史律历志(卷72).历代天文律历等志汇编(8).2595~2596。

为一等差数列 $\alpha-\beta x$?

晷影算法的一大难题在于,太阳在每日正午时分,在浑仪的子午圈上半部分南侧的半圆弧内约47°的弧段上非线性地移行,这一点导致我们很难在时间与影长之间建立一种直接的几何模型来推导其数学关系。

不过,根据浑天理论,很容易画出图5-7,其中,W 表示冬至午中太阳的位置,S 表示冬至后第 x 日午中太阳的位置,OH 为立于地平 AB 上的8尺圭表,M、N 分别为相应之晷影的端点

$$OM=w,ON=f_1(x)$$

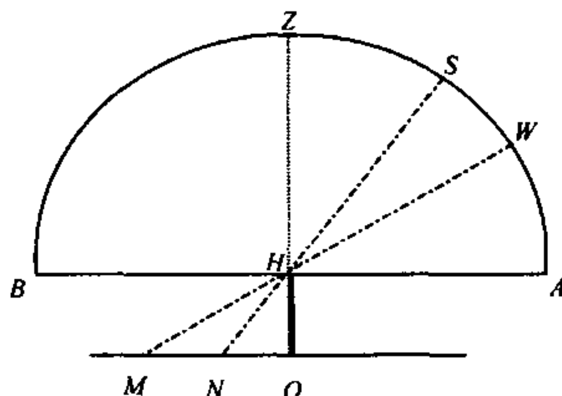


图5-7 晷影图

对于中国中原地区而言,太阳在南中天的最低位置为 W,因此,冬至前后的午中晷影必在 OM 内变化。欲求每日晷影 $ON=f_1(x)$,只须考查午中太阳位置的改变 WS 对其影差 NM 变化的影响即可。换句话说,如果能推出

$$\frac{NM}{WS}=\frac{w-f_1(x)}{\theta(x)}$$

的变化率,就可以求出 $f_1(x)$。其中

$$\theta(x)=WS=\varepsilon-|\delta(x)|$$

ε 为黄赤大距,$\delta(x)$ 表示冬至前后第 x 日太阳的视赤纬。如果令 $a=$

91.31,表示一个象限的度分,则由《崇玄历》知①

$$\theta(x) = \varepsilon\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}}{3.6}\right]$$

其中,$\varepsilon = 24$,$x \leqslant a$。显然上式中的第二项为调整项,可忽略不计,因此

$$\theta(x) \approx \frac{\varepsilon x^2}{a^2} = kx^2$$

于是

$$\frac{w - f_1(x)}{\theta(x)} \approx \frac{w - f_1(x)}{kx^2}$$

其中,$k = \varepsilon/a^2$为一常数。这样一来,考查 NM/WS 的变化率,相当于求

$$\frac{w - f_1(x)}{x^2}$$

的变化率。这种考查,只须通过计算各个节气晷影的变化率即可看出,采用线性插值,即构造一等差数列 $\alpha - \beta x$,便可很好地逼近 NM/WS,于是,就有了这样的模型

$$\frac{w - f_1(x)}{x^2} = \alpha - \beta x$$

这恐怕就是边冈立方相减相乘算法的构建原理了。夏至前后的情形,是类似的。

我们由此可以得出的结论是,边冈立方相减相乘法,与三次插值法没有关系,它是采用一种特殊的数值逼近方法完成的,其造术思想对于1100多年前的学者来说,应是相当有趣,并值得进一步分析总结的。边冈的这个算法,除了直接影响《仪天历》(1001)与《崇天历》(1024)之外,对《明天历》(1064)与《纪元历》(1106)晷影算法的构造亦有不同程度的启发。

---

①算法分析参见本书第六章第2节,算法原文见:宋史律历志(卷30下).历代天文律历等志汇编(7).2354。

3.《明天历》与《纪元历》晷影公式之构造

《明天历》①与《纪元历》②原则上亦将一回归年的晷影算法分成冬至与夏至前后两种情形讨论。与《崇玄历》不同处是,它们均在夏至前后公式的定义域之后半部分,又叠加一修正值。《明天历》晷影公式高达5次函数,而《纪元历》则采用了非常罕见的有理多项式函数。[20]

这两部历法所构造的晷影算法,在中国传统数理天文学上是比较特殊的,其原理是什么仍然是一个谜。据陈美东的疏解,以夏至前后的情形为例:《明天历》取

$$f(x) = s + \left[\left(4852.5 - \frac{10x}{3}\right) + \Delta\right]x^2 \times 10^{-7} \tag{5-23}$$

其中,s 为夏至日晷影长度。当夏至前后 $x \leqslant 91.31$ 日时,取

$$\Delta = 250 \times \left[2.4 - \frac{(200 - x)x}{4135}\right]$$

当夏至前后 $91.31 < x \leqslant 137$ 日时,令 $a = 91.31$,表示一个象限的长度,则取

$$\Delta = \frac{5(x - a)}{3} \times \left\{2.4 - \frac{[200 - (2a - x)](2a - x)}{4135}\right\}$$

式(5-23)中的 Δ 分别是对日行不均匀性的修正项,如果忽略之,则其主体部分退化为

$$f(x) = s + \left(4852.5 - \frac{10}{3}x\right)x^2 \times 10^{-7} \tag{5-24}$$

比较式(5-24)与式(5-18),不难发现《明天历》与《崇玄历》晷影算法在结构上的相似之处。

《纪元历》夏至前后 $x \leqslant 120.42$ 日时的算式为

$$f(x) = s + \frac{x^2}{2.25x + 1980.75 + \Delta} \tag{5-25}$$

①宋史律历志(卷75).历代天文律历等志汇编(8).2658。

②宋史律历志(卷79).历代天文律历等志汇编(8).2809~2810。

其中,s 为夏至日晷影长度。当夏至前后 $x\leqslant 60.21$ 日时,修正项取

$$\Delta=0$$

当 $60.21<x\leqslant 120.42$ 日时,取

$$\Delta=\frac{(120.42-x)(x-60.21)}{77}$$

这显然是一种叠加的修正项。如果将 Δ 忽略,则式(5-25)变为

$$\frac{x^2}{f(x)-s}=1980.75+2.25x$$

由此可见,《纪元历》的晷影公式与《崇玄历》算法仍有相似之处,《崇玄历》令

$$\frac{f(x)-s}{x^2}=\alpha-\beta x$$

是为递减的等差数列,而《纪元历》很可能与之相反,取

$$\frac{x^2}{f(x)-s}=\alpha+\beta x$$

是为递增的等差数列。这一取法上的差异,导致前者获得一个三次多项式函数,而后者则取得一个有理函数。

因为《纪元历》夏至晷影 $s=1.56$ 尺,如果推定 $\beta=2.25$,则由 $f(120.42)=8$尺,可立得 $\alpha=1980.75$。

我们不妨推想,《明天历》与《纪元历》的晷影算法都是沿袭《崇玄历》的构建思路推导出来的,其中修正项 Δ 的给出,仅仅是对边冈算法的改进而已。由此可见传统历法自唐代以降的晷影算法一脉相承的痕迹。

通过对《天文大成》所记载的史料的分析,可以证实,中国古代数理天文学中著名的"立方相减相乘算法",是采用一种特殊的数值逼近方法构造出来的,以冬至前后晷影公式 $f_1(x)$ 为例,其造术思想可以概括如下:假设 w 表示冬至晷影,则边冈令

$$\frac{w-f_1(x)}{x^2}$$

为一个等差数列 $\alpha-\beta x$。这种算法模型的建立,实际上是由两个步骤

构成的：

(1) 推导算法模型$f_1(x)=w-(\alpha-\beta x)x^2$；

(2) 构造等差数列$\alpha-\beta x$。

因此，可以肯定地说，边冈的立方相减相乘算法与三次内插法是没有关系的。

第四节　三次内插法

《授时历》(1280)中的平立定三次插值算法是如何构建的？这恐怕是中国天算史界久讼未决的最有影响的问题之一。如果从清初硕学黄宗羲(1610～1695)[21]与梅文鼎(1633～1721)[22]算起，人们对它的探讨迄今已逾300年，研究论著可谓是数不胜数。梅文鼎之后较有影响的尚有顾观光，[23]现代天算史家如李俨、钱宝琮及严敦杰等亦有详论。日本学者的研究从关孝和到薮内清，几未间断。

笔者曾对《授时历》三次插值算法的构建方法进行过一种推测，结论是：它与刘焯的二次插值法一脉相承(文献[9])。这种在有限的史料基础上，根据传统数学的思维方式，利用算理分析的研究方法所进行的推断，在正统的史学家看来，由于缺乏充分的原始文献的支持，或可成一家之言，但终难以成定论。

不过，有趣的是，通过对《天文大成管窥辑要》所载有关《授时历》三次内插算法之史料的解读分析，我们发现，笔者以前的推断，在造术路线与基本构图上，与书中的记述几近吻合。

一、《授时历》三次内插法的主要问题

现代天算史家在论述中国古代的插值法时，往往习惯于使用现代有限差分学的符号、形式乃至概念对其进行诠释，从刘焯的等间距二次内插到一行的不等间距二次内插再到王恂、郭守敬的三次内插，几乎都被套用成牛顿内插公式的形式。如果从解释中算家的内插法有

什么或是什么的角度来考虑,这样做本无可厚非,但欲探讨为什么会产生这些算法,就会妨碍我们的思维。一个显例即是,过去人们对一行推广刘焯算法而创不等间距二次内插法一直评价很高,但李继闵率先指出,按刘焯构造二次插值算法的思路,推广至不等间距的情形可以说几乎不需要任何技巧与创新。

插值函数的构造方法并非唯一,这导致所获结果在表现形式上亦不甚相似。朱世杰的高阶等差级数求和公式形式上与牛顿公式类同,它应是比较高级的数学抽象的产物,正如傅大为与刘钝所言,在此之前,即使是形式上与之相同的三次插值公式亦不曾出现。[24,25]

由代数学基本定理可知,若选择相同的插值点,则无论以何种方式构造其插值函数,其结果必然相通。因此说,王恂、郭守敬的平立定三差法是精确的三次插值函数,这一点不必怀疑,但其造术方法是否与朱世杰如出一辙,其结论显然应当是否定的。

特定的形式往往反映了特定的内容。朱世杰的高阶等差级数求和公式,是对各阶三角垛的性质综合归纳后导出的结果,因此,其垛积公式虽以具体数值表出,但仍然代表了任意阶等差级数有限和的一般公式。而从刘焯到王恂、郭守敬等历算家走过的历程,则是对具体问题分析而构造的算法,具有特定的物理意义与几何模型,人们很难从这些算法上,看出进一步推广的希望所在,这恐怕就是刘焯算法问世了 600 多年,才出现平立定三差的原因。在这个漫长的探索过程中,使中算家对垛积的性质逐渐地有更丰富的认识,进而导致朱世杰公式的产生,应当不必怀疑。因此,问题的合适提法或许是:从王恂、郭守敬的平立定三差能否发展出朱世杰的垛积算法。

《授时历》平立定三差的造术原理,《元史》未做交代,目前人们最常引用的材料,即梅文鼎根据《大统历通轨》与《大统历历草》编写的《大统历法原》,收载于《明史历志》。[①] 梅文鼎参照的原始文献,现已

---

①明史历志(卷 33). 中华书局编. 历代天文律历等志汇编(10). 北京:中华书局,1976,3595 ~ 3620。

失传,《明史历志》对三差常数的构成列有详细数表,缺点是对其天文数理意义未有深刻阐释,这也是造成研究者众说纷纭的主要原因。

实际上,经过薮内清、李俨、钱宝琮、严敦杰等前辈学者的研究,人们已经了解到《授时历》三次内插法在现代数学中的意义,我们也不难用代数的方法"复原"这些算法。但是,问题是,郭守敬究竟是如何构造出这个算法的?要想解决《授时历》三次内插法的造术之谜,如下两个原则恐怕是必须要遵守的:第一,应该有原始文献的支持;第二,复原的过程必须与原始记录的步骤、术语、数据相吻合。

二、《天文大成》中的《授时历》三差算法

我们在《天文大成》第八卷中看到的"论日躔盈缩差",较之《明史历志》更为详细地记述了《授时历》的三差算法:

> 郭太史立招差法以推之:列实测盈缩积差各六段,亦以六除二至后所入初末限,得盈缩每段积日。各以段积日除各段下积差,得各段平差,是差虽平于一段,而较之各段犹未平也,即为每段汎平差积。以各段平差前后相减为一差,其得数尚未齐,乃平差逐段渐少之差分也。又以一差前后相减为二差,而各段之得数齐矣。
>
> 即以第一段平差为泛平积,用本段二差加减一差为泛平差,以加减泛平差为定平积。是即所谓定差也。以二除二差为立差,加减泛平差为定平差,以段日除之,为日定平差,即所谓平差也。以段日再除立差为日立差,即所谓立差也。
>
> 其加减法皆以后多前少者为减,前多后少者为加,是以求差之法:置立差,以限乘之,并平差,再以限乘之;以平差一除,故一乘,立差再除,故再乘也。盖以平立二差为消息之法,用之以减定差,其定差又与限相乘而得差者,以段积日与段积差相除故也。所得盈缩差数与所测允合。此以三差

立法，最为奇捷。（文献[12]，卷8，2～3）

关孝和（？～1708）等日本和算家在研究《授时历》平立定三差算法时，皆引用上述文字（文献[14]，151～152）。但中国的学者，似很少留意这段记录。

上述引文的第一段是在讲插值点及其函数值的差分，构造差分表，给插值函数的建立做准备。

术文中的"二至"表示冬至或夏至。我们以冬至到春分的时段为例，假令 x 表示冬至后的日数，$f(x)$ 表示冬至后第 x 日太阳的盈缩差，①已知冬至时盈缩差为0，即 $f(0)=0$。

将冬至距春分定气日（太阳运行一个象限）的时间等分为6段，记每段长度为 n 日，此数大约表示一个定气的长度。当 $x=n$，$2n$，…，$6n$ 时，根据实测确定相应的函数值

$$f(kn),k=1,2,\cdots,6$$

因为 $f(0)=0$，所以，必有 $g(x)$ 可使

$$f(x)=xg(x)$$

这样一来，问题就转化为通过对 $g(x)$ 的推导，而获得 $f(x)$。$g(x)$ 的天文意义为：冬至后前 x 日之内平均每日太阳实行度与平行度之差，因此，原文称其为"平差"。由于我们已知 $f(kn)$，$k=1,2,\cdots,6$，据此，可以得到

各段平差 $g(kn)$，　　$k=1,2,\cdots,6$

各段一差 $\Delta_k=g(kn)-g(kn+n)$，　$k=1,2,\cdots,5$

各段二差 $\Delta_k^2=\Delta_{k+1}-\Delta_k$，　　$k=1,2,3,4$

其中，一差 Δ_k 表示平差 $g(kn)$ 逐段衰减之数，因各段一差 Δ_k 仍不相同，故取二差 Δ_k^2，使

$$\Delta_1^2=\Delta_2^2=\Delta_3^2=\Delta_4^2\text{，简记为 }\Delta^2$$

这个过程，首先确定插值点 $x=kn$，然后据实测取 $f(kn)$，为了

①即太阳实行度与平行度之差，因冬至点被认为是近日点，故此数相当于现代天文学中的中心差。

保证差分结果使二差 Δ_k^2 彼此相同，可以认为诸 $f(kn)$ 是根据实测值辅以微调而确定的数值。

第二段文字，利用构造好的差分表中的数据，给出插值函数 $f(x)$ 的各项系数

$$定差 = g(n) + (\Delta_1 - \Delta^2)$$
$$平差 = [(\Delta_1 - \Delta^2) - \Delta^2/2]/n$$
$$立差 = \Delta^2/2n^2$$

第三段文字，说明插值函数 $f(x)$ 之构成：

$$消息之法 = \left[\frac{(\Delta_1 - \Delta^2) - \Delta^2/2}{n} + \frac{\Delta^2}{2n^2}x\right]x$$

是用来修正常数项定差的，由此即得辅助函数

$$g(x) = [g(n) + (\Delta_1 - \Delta^2)] - \left[\frac{(\Delta_1 - \Delta^2) - \Delta^2/2}{n} + \frac{\Delta^2}{2n^2}x\right]x \quad (5\text{-}26)$$

称 $g(x)$ 的一次项系数为“平差”，是因该数据被段日 n 相除；二次项系数为“立差”，是因其被段日平方 n^2 相除。

“其定差又与限相乘而得差者”，此处“定差”为 $g(x)$，所“得差”，即为

$$f(x) = xg(x) \quad (5\text{-}27)$$

表示冬至后第 x 日太阳实行度与平行度之差（盈缩差）。原文解释令 $xg(x)$ 为 $f(x)$ 的理由时称，因“段积日 kn 与段积差 $f(kn)$ 相除故也”，亦即由当初令

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

还原为式(5-27)$f(x)$。

与梅文鼎撰写的《明史历志》相比较，[①]前引《天文大成》中关于《授时历》日躔三次内插算法的构成说明，更加详细、清楚。类似的文字在《天文大成》第十卷“论月离迟疾差”、第十二卷“五星

①明史历志（卷33）．历代天文律历等志汇编（10）．3595～3602。

常变差”中也有记载。通过上述分析，可以推断，《授时历》的三次内插函数$f(x)$的构造步骤是这样的：

(1)取辅助函数$g(x)=f(x)/x$，将所求函数$f(x)$降阶；

(2)构造$g(x)$；

(3)根据式(5-27)导出所求函数$f(x)$。

其中的关键是第二步，对辅助函数$g(x)$的构造。问题是，《明史历志》与《天文大成》的前述引文虽然详述了辅助函数$g(x)$各项系数(定差、平差、立差)的构成，但是，仍未明白地交待究竟这三差是如何得来的？也就是说，辅助函数$g(x)$的具体构建细节仍然是不清楚的。

导致我们的研究出现实质性的转机，是在《天文大成》之“五星常变差”一节中，发现了弥补上述缺失的一段史料。

三、平立定三差的构造原理

我们知道，从地球上观测，行星与日、月的视运动是很不一样的，太阳与月亮的视运动轨迹分别为某个椭圆轨道，其视行速的不均匀性，即古人所称的日躔盈缩与月离迟疾，而行星则不是如此简单，它们本身绕太阳按某个椭圆轨道运行，由此产生的不均匀运动，《授时历》按三次插值法予以修正。[①] 另外，从地球上看，行星视运动还被分成顺行与逆行两种动态，其中顺行、逆行时段行星的视运动速度都是按照慢—快—慢的规律变化的，如何使之连续，还需要根据实测，设计算法，进行推算。这个算法，在《授时历》中被设计成一种类似刘焯二次分段插值的程序，将各个时段的行星视运动联系起来。《天文大成》对此悉数照录，此即《授时历》步五星

①粗略地说，这个算法处理的是行星公转的中心差，但是，实际上，这个三次函数所包含的内容要更多一些，它是行星的中心差与另外一个差的复合。

章中“求诸段日率度率”之后的几段术文。①

由于《授时历》已经发明并使用了三次插值算法，仍然使用二次插值的做法当属省约，自然可以进一步改进，因此，《天文大成》接着写道：

> 然其段日平度虽本于实测，但其数有多寡不齐，若紊而无次，张方斋效三差法以求之，逐段每日可得其度，是星之进退，亦各有渐次矣。（文献[12]，卷12，6）

张方斋是谁，笔者惜未查到，不过他效法《授时历》三次插值算法而重新设计的五星进退之术，却更明白地揭示了平立定三差公式(5-26)之系数的来源。

1. “定差”的推求

复原《授时历》三次内插算法的关键，就是解释清楚辅助函数 $g(x)$ 的构造原理，而要做到这一点，就需找到这个函数的系数的来源。张方斋算法的第一步，首先确定辅助函数 $g(x)$ 的常数项：定差。张方斋说：

> 法以各星周合平度分，俱有疾、迟及退三限，每限各列三段，其段内日分相均，而列以积数，平行度须依实测积度列之，各有多寡不同。以本段日分除本段平行度分，得本段每日平行度(行)[分]。因与各段每日平行度分有多寡之差，故名平差分。以各段平差分前后相较，所得之数为一差，乃一段之平差积数也。又以前后一差相较，所得之数为二差，则得各段俱差之积数矣。（文献[12]，卷12，6）

以上文字在说，历法推算，通常将行星视运动的一个会合周期划分为快行、慢行与逆行三种状态，对每一种运行状态再等分为三小段，并以此设插值点，分别对这三种状态构造不同的三次插值函

①元史历志（卷55）．历代天文律历等志汇编(9)．3437。

数来进行数值逼近。

假定$f(x)$表示其中任一种运行状态自起始点至第x日时所运行的度数(即积度)，将这种运行状态持续的总时间等分为三，每段长为n日，则各段的平行度即为其实测积度$f(kn)$，$k=1,2,3$，并且$f(0)=0$。

按照术文，由于“其段内日分相均，而列以积数”，所以，所谓“本段日分”，应指从起点到本段末的时间，例如，第k段日分，指kn日，于是有本段每日平行度

$$g(kn)=\frac{f(kn)}{kn},k=1,2,3$$

因为，各段$g(kn)$又有不同，所以称其为“平差分”。假设$g(kn)>g(kn+n)$，如图5-8所示，有

一差：$\Delta_k=g(kn)-g(kn+n)=\square A_kB_{k+1}\quad k=1,2$

二差：$\Delta_1^2=\Delta_2-\Delta_1=\square A_2D_3$

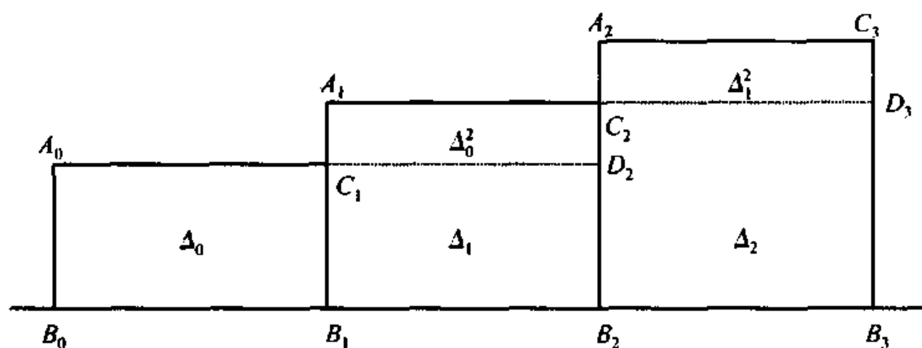


图5-8　《授时历》三次插值法的构造(Ⅰ)

另外，假定取$g(0)$表示初段平差分，则有

$$\Delta_0^2=\Delta_1-\Delta_0=\Delta_1-[g(0)-g(n)]=\square A_1D_2$$

因为，按《授时历》三次内插算法，“以一差前后相减为二差，而各段之数齐矣。”所以，上文称Δ_1^2为“各段俱差之积数”，因此有$\square A_1D_2=\square A_2D_3$，或者

$$\Delta_1^2 = \Delta_0^2 = \Delta^2$$

由此即得

$$g(0) = g(n) + (\Delta_1 - \Delta^2)$$

其中，$g(0)$实际上为辅助函数$g(x)$之常数项，亦即"定差"。《天文大成》在此段原文的最后总结三差之法时说：

其立定差之法，从本限段日分除本限平度分，即得本限平差度分，加入汎平积，其得定为差。是为三差法也。（文献[12]，卷12，7）

术文中的"立定差之法"，意在补述定差之构成：设本限段日为n日，其平度分为$f(n)$，则"本限平差度分"为

$$g(n) = \frac{f(n)}{n}$$

"汎平积"是指图5-8中的$\square A_0B_1$，由于

$$\square A_0B_1 = \square C_1B_2 = \square A_1B_2 - \square A_1D_2 = \Delta_1 - \Delta^2$$

由此即得"定差"

$$g(0) = g(n) + (\Delta_1 - \Delta^2)$$

由于辅助函数$g(x)$也是多项式，所以古人不会考虑由定义

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

而产生的$g(0)$是何物的问题。这一点梅文鼎在《授时历平立定三差详说》中早有论述：

定差者何？曰所测盈缩初日最大之差也。凡盈缩末日即同平行，其盈缩之最多，必在初日。今欲求逐日之差，必先求初日最大之差，以为之准则，故曰定差也。[①]

古代的"初"与"一"是不同的，初日通常表示第0日，其值为$g(0)$或$f(0)$；而第一日的结果才为$g(1)$或$f(1)$；如"皇祐岳台晷

---

①四库全书(794).影印本.台北：商务印书馆，1986，368。

影"即是一例。[①] 梅文鼎的话清楚地说明了古人在构造三次插值函数时,先推求定差(即初率)$g(0)$的数理意义。

以上是算法的第一步:选择插值点,推求各阶差分,确定定差 $g(0)$。

2. "平差"与"立差"的推求

平差与立差分别为辅助函数 $g(x)$的一次项、二次项系数。由于常数项定差 $g(0)$已经获得,只要平差与立差确定,大功即告完成。如图 5-8 所示,由于

$$g(kn+n) = g(kn) - \square A_k B_{k+1}$$

所以,当 $kn \leqslant x < kn+n$ 时,若以 $A_k C_{k+1}$ 来表示 $g(x)$ 的变化,就会在各段之交结处呈跳跃性间断:$A_{k+1} C_{k+1}$,求平差与立差的目的,就是设计一种调整的算法(即"消息之法"),将图 5-8 的折线型曲线 $A_k C_{k+1}$,修正为连续的渐增或渐减型斜线。这一修正,就是张方斋所说的"折多补寡":

> 是二差或前多后少,或前少后多,其多寡不同,故又以二除之,折多补寡,而得立差。以二差减一差,余为汎平积,云"平积"者,得本段之平差积也,云"汎"者,以其平差积犹汎而未切也。然与各段之平差积俱相同矣。以立差减汎平差积,为定平差。又以段日除之,得为日平差,是得每一日之平差。又置立差以段日除之,得为每日平立差,再以段日除之,为每日日立差。其名立差者,以一除为平差,再除为立差也。其法须系立差,其用则扯长以从平差而减定差矣。(文献[12],卷 12,6~7)

如图 5-9 所示,由于各段的二差彼此相等(见图 5-8:$\square A_1 D_2 = \square A_2 D_3$),因此,若将二差折半(见图 5-9:$\square A_k F_{k+1}$,$k=0,1,2$),以后多之数去补前少之数,则相邻两段即可等积。

---

①宋史律历志(卷 76).历代天文律历等志汇编(8).2712。

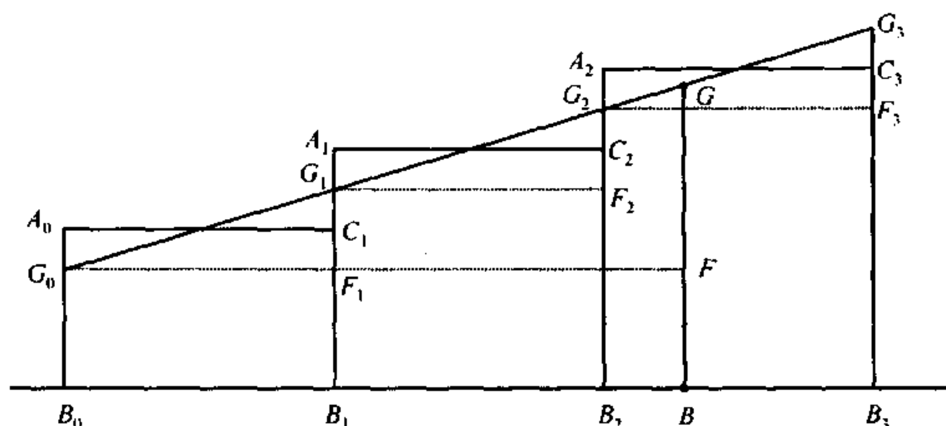


图 5-9　《授时历》三次插值法的构造(II)

所以,欲在$\square A_kB_{k+1}(k=0,1,2)$三段矩形之上寻求一条直线,使之转化为某个等积的梯形,可以在立差上(即:$\square A_kF_{k+1},k=0,1,2$)上按出入相补原理"折多补寡"来完成这个变化:因为$G_kC_k=C_kF_k$,所以

$$\square A_{k-1}F_k=\Delta G_{k-1}G_kF_k,k=1,2,3$$

"以二差减一差",实即以二差Δ^2去减后一段一差$\Delta_k=\square A_kB_{k+1}$,而得本段一差(即平差积)

$$\Delta_{k-1}=\square A_{k-1}B_k,k=1,2$$

这就是"然与各段之平差积俱相同矣"的意思。原文称其差($\square A_kB_{k+1}-\Delta^2$)所余($\square A_{k-1}B_k$)为汎平积,并解释"汎"的意思是指各段平差积($\square A_kB_{k+1}$)尚未由矩形"切"成梯形($G_kB_kB_{k+1}G_{k+1}$)。这个"切"字,很明白地告诉了我们"折多补寡"的结果。

由于　$\square A_0B=$梯形$G_0B_0B_1G_1=\Delta_0=g(0)-g(n)$

所以　　　$g(n)=g(0)-$梯形$G_0B_0B_1G_1$

于是,令$B_0B=x$,则有

$$g(x)=g(0)-\text{梯形}\ G_0B_0BG$$

其中,$g(0)$为定差,是常数。问题是:如何求梯形G_0B_0BG的面积呢?原术的做法是将其分成两个部分:$\square G_0B+\Delta G_0GF=$梯形

$G_0B_0BG_0$。已知

$$\text{定平差} = \square G_0B_1 = (\Delta_1 - \Delta^2) - \Delta^2/2$$

令 $x = B_0B$，而 $B_0B_1 = n$，于是有

$$\square G_0B : \square G_0B_1 = x : n$$

立得

$$\square G_0B = \frac{(\Delta_1 - \Delta^2) - \Delta^2/2}{n} \times x$$

又，因为 $\Delta G_0G_1F_1 = \Delta^2/2$，而

$$\Delta G_0GF : \Delta G_0G_1F_1 = x^2 : n^2$$

立得

$$\Delta G_0GF = \frac{\Delta^2x^2}{2n^2}$$

由此，根据 $g(x) = g(0) - (\square G_0B + \Delta G_0GF)$，即得

$$g(x) = [g(n) + (\Delta_1 - \Delta^2)] - \left[\frac{(\Delta_1 - \Delta^2) - \Delta^2/2}{n}x + \frac{\Delta^2x^2}{2n^2}\right]$$

最后，按 $f(x) = x\,g(x)$，即获《授时历》三次插值公式。

四、古历内插法的基本思想

自古以来，人们便将中算家的内插法列为垛积类算法。这种分类，即使以现代数学的标准判定，也是不错的。那么，根据上述讨论，王恂与郭守敬在《授时历》中构造的三次插值算法与垛积有什么关系呢？

按垛积本义，就是对各种级数的求和。刘焯在《皇极历》(600)中首创的二次插值算法，可以概括为以下两个步骤：

(1) 构造等差数列：设 $f(x)$ 为欲求之插值函数，取插值点 $x = 0, n, 2n$，由已知 $f(0)$，$f(n)$，$f(2n)$，构造出等差数列

$$f(m) - f(m-1), m = 1, 2, \cdots$$

(2) 求等差级数之和

$$f(x) = f(0) + \sum_{1}^{x}[f(m) - f(m-1)]$$

这就是一种垛积算法。《授时历》的平立定三差算法，最关键的思想是将问题最终转化为求图 5-9 中梯形 B_0G_0GB 的面积。此时，可以选择的方法不止一种，倘按刘焯思想，以日为单位将 B_0B 等分 x 段（x 取整数），因为

$$\text{梯形 } B_0G_0GB = g(0) - g(x)$$

所以当问题转化为求梯形 B_0G_0GB 之面积时，自变量 x 以日为单位连续变化，则梯形 B_0G_0GB 即可表示为 x 个等差的长条梯形之和

$$g(0) - g(x) = \sum_{1}^{x} [g(m-1) - g(m)]$$

于是，按图 5-9 所示，有

$$\text{初率} = G_0B_0 = \square G_0B_1/n = \frac{(\Delta_1 - \Delta^2) - \Delta^2/2}{n}$$

$$\text{日差} = \frac{GF}{x} = \frac{G_1F_1}{n} = \frac{\Delta^2}{n^2}$$

$$g(0) - g(1) = \text{初率} + \frac{\Delta^2}{2n^2}$$

$$g(m-1) - g(m) = [g(0) - g(1)] + \frac{(m-1)\Delta^2}{n^2}$$

$$g(0) = g(n) + \square A_0B_1 = g(n) + (\Delta_1 - \Delta^2)$$

$$g(x) = g(0) - \sum_{1}^{x} [g(m-1) - g(m)]$$

$$f(x) = xg(x) = [g(n) + (\Delta_1 - \Delta^2)]x - \left[\frac{(\Delta_1 - \Delta^2) - \Delta^2/2}{n}x^2 + \frac{\Delta^2}{2n^2}x^3\right]$$

因此，作为一种垛积算法，王恂与郭守敬的《授时历》三次内插法的构建原理，可以概括为以下三个步骤：

(1) 将插值函数降阶：设 $f(x)$ 为欲求之插值函数，因为 $f(0)=0$，所以，令 $f(x)=x\,g(x)$；

(2) 构造等差数列：取插值点 $x=n,2n,3n$，则已知 $g(kn)=\frac{f(kn)}{kn}(k=1,2,3)$，由此导出 $g(0)$，并构造出等差数列：$g(m-1)-g(m), m=1,2,3,\cdots$；

(3) 求等差级数之和：$g(x)=g(0)+\sum_{1}^{x}[g(m)-g(m-1)]$，通过还原，得三次插值函数 $f(x)=xg(x)$。

实际上，《授时历》的插值函数 $f(x)$ 所选取的插值点是 4 个：$x=0,n,2n,3n$，只不过其被插函数有些特殊：$f(0)=0$。王恂与郭守敬之所以能够成功地沿用刘焯的算法思想，在其《授时历》中构造出三次插值函数，首先归因于他们将所求插值函数 $f(x)$ 转化为低一阶的辅助函数 $g(x)$，这样一来，便可以借助几何图形来推导 $g(x)$。

在构造辅助函数 $g(x)$ 的过程中，很重要的一步，就是利用已知的插值常数 $g(kn)(k=1,2,3)$，导出 $g(0)$，这是该算法的创新之处。笔者在"中国古代的内插法：从刘焯到郭守敬"一文中(文献[9]，195～200)，由于无法合理解释 $g(0)$ 的物理意义，而选择了如下的等差数列

$$g(n)-g(x)=\sum_{m=1}^{x-n}[g(n+m-1)-g(n+m)]$$

并由此导出 $f(x)=xg(x)$。通过前文的分析，不难看出古人对 $g(0)$ 已有清楚的认识，因此，可按图 5-9 更直接地导出其三次插值公式来。

将所求插值函数 $f(x)$ 转化为低一阶的辅助函数 $g(x)$ 来处理，在算法思想上使《授时历》的三次内插法向牛顿插值构造法迈进了一大步。

参 考 文 献

[1] 薮内清. 隋唐历法史の研究. 东京：三省堂版，1944

[2] 李俨. 中算家的内插法研究. 北京:科学出版社,1957
[3] 钱宝琮. 从春秋到明末的历法沿革. 历史研究,1960,(3):35~67
[4] 严敦杰. 中算家的招差术. 数学通报,1955(1):4~13;1955(2):12~15
[5] 李继闵.《九章算术》校证. 西安:陕西科技出版社,1993. 349~350
[6] [宋]秦九韶. 数书九章. 见:丛书集成初编. 北京:中华书局,1985. 79
[7] 严敦杰. 中国古代的黄赤道差计算法. 见:科学史集刊(1). 北京:科学出版社,1958. 47~58
[8] 陈美东. 中国古代有关历表及其算法的公式化. 自然科学史研究,1988,7(3):232~236
[9] 曲安京等. 中国古代数理天文学探析. 西安:西北大学出版社,1994. 201~210
[10] 李岳生,黄友谦. 数值逼近. 北京:人民教育出版社,1987. 37
[11] 杨家骆. 四库全书学典. 上海:世界书局,1946. 4~127
[12] [清]黄鼎. 天文大成管窥辑要(卷首). 顺治十年(1653),云林阁刊本,影印再版,台北:老古文化事业公司,1984
[13] 丁福保等. 四部总录天文编. 上海:商务印书馆,1956. 52
[14] 日本学士院编. 明治前日本数学史(Ⅱ). 第三版. 东京:岩波书店,1994. 9
[15] 东京大学东洋文化研究所编. 东京大学东洋文化研究所汉籍分类目录. 东京:大藏省印刷局,1974. 514
[16] 京都大学人文科学研究所编. 京都大学人文科学研究所汉籍分类目录(上). 京都:山代印刷株式会社,1964
[17] 中山茂. 符天历の天文学史的位置. 科学史研究(日本),71号,1964
[18] [清]阮元. 畴人传. 上海:商务印书馆,1935、213
[19] 陈美东. 崇玄、仪天、崇天三历晷长计算法及三次差内插法的应用. 自然科学史研究,1985,4(4):131~143
[20] 陈美东. 皇祐、崇宁晷长计算法之研究. 自然科学史研究,1989,8(1):17~27
[21] [清]黄宗羲. 授时历故. 嘉业堂丛书本,1923
[22] [清]梅文鼎. 平立定三差详说. 见:梅氏丛书辑要. 兼济堂刊本,1875(同治十三年)
[23] [清]顾观光. 平立定三差解. 见:武陵山人遗书. 独山莫氏刊本,1883

(光绪九年)
[24] 傅大为.从沈括到朱世杰——由"体积"级数至"乘方图"级数典范转移之历史.见:鲁经邦编.第二届科学史研讨会汇刊(台湾),1991.249 ~ 268
[25] 刘钝.《皇极历》中等间距二次插值方法术文释义及其物理意义.自然科学史研究,1994,13(4):305 ~ 315

第六章　多项式函数与几何模型

有人说,西方古代数学重视几何,擅长演绎推理;而中国古代数学重视代数,擅长数值计算。这样的说法大体上是不错的。不过,这并不意味着中国古代数理天文学家完全排斥几何模型的构建,而所谓的数值算法,也并非仅指多项式内插法。本章所讨论的算法,大都是目前的中国数学史著作所没有关注到的内容。

第一节　求根公式与反函数

方程论的研究,是中国古代数学的一个薄弱环节。或许是由于中国传统数理科学过分注重实用性的缘故,中算家们通常仅仅满足对多项式代数方程之某一正根的数值求解,以致在宋代,便创造了能够计算任意有理系数多项式代数方程之数值解的算法,这就是著名的"增乘开方法"。但是,对于多项式方程之根与系数的关系,中算家们很少进行深入细致的研究。

本节将首先扼要回顾早期中国天算史料中的两例特殊的二次方程求根公式的构造,然后,对比分析在《纪元历》中新发现的求根公式之应用实例。我们将会看到,姚舜辅在《纪元历》中通过对二次方程求根公式的推导,定义了一例精确的反函数。

一、赵爽与一行的求根公式

赵爽(约 3 世纪),亦名赵君卿,三国时著名数学家,生平不详。其传世之作为《周髀算经注》。在为《周髀算经》(成书约公元前 100 年)作注时,创作论文"句股圆方图说",详细讨论了勾、股、

弦3边的各种关系，并构造弦图，证明了勾股定理。[1]在这篇论文的最后，赵爽写道：

> 其倍弦为广袤合，令句、股见者自乘，为其实。[令合自乘]，四实以减之，开其余，所得为差。以差减合，半其余为广。（文献[1]，149～150）

假定 x_1，x_2 分别表示某个矩形的两条边：广与袤，则已知 $x_1+x_2=2\times$弦，$x_1x_2=$勾自乘（或股自乘）。根据上述术文，解得广 x_1 为

$$x_1=\frac{(x_1+x_2)-\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{2}$$

显而易见，x_1 是下述方程的一个正根[2]

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0 \qquad (6\text{-}1)$$

僧一行（683～727），俗名张遂，是唐代著名的历算家，在其《大衍历》推步行星行度的算法中，一行给出了已知星行日数为 x，推求行星运行度数 $y(x)$ 的算法，其术文称：

> 其先定日数而求度者，减所求日一，以每日差乘之，二而一，所得以加、减初日行分，以所求日乘之，如辰法而一，为度。①

根据上述术文，设初日行度（即行星第一日运行速度）$=a$，日差（即相邻两日行星速度之差）$=d$，则到第 x 日行星运行的度数为

$$y(x)=\left(a+\frac{(x-1)d}{2}\right)x \text{ 度}$$

若假定已知行星运行度数 y，返求行星所行日数 x，则相当于求解二次方程

$$x^2+\left(\frac{2a-d}{d}\right)x-\frac{2y}{d}=0 \qquad (6\text{-}2)$$

①新唐书历志（卷28下）．中华书局编．历代天文律历等志汇编（7）．北京：中华书局，1976，2270。

之正根。在接下来的术文中，一行写道：

> 若先定度数而返求日者：以辰法乘所求行度。有分者，从之。八之，如每日差而一，为积。倍初日行分，以每日差加、减之，如每日差而一，为率。令自乘，以积加、减之。开方除之，所得以率加、减之。乃半之，得所求日数。

根据上述文字，人们发现，一行给出了式(6-2)的如下一个根式解[3]

$$x=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{2a-d}{d}\right)^2+\frac{8y}{d}}-\frac{2a-d}{d}\right]$$

以上便是迄今为止，人们在中国古代天算原典中所找到的仅有的两例二次方程求根公式的应用。

二、《纪元历》的求根公式与反函数

《纪元历》(1106)是宋代姚舜辅编制的一部历法，这部历法被完整地收录在《宋史律历志》卷79～80中，其中有许多有趣的发明创造。如所周知，历法计算通常要用到黄、赤道坐标的互换，古历中，一般皆以太阳赤道度 x 为已知量，给出黄赤道经度的差值，然后加减其赤道度，即得其黄道度值 y。如《纪元历》记载：

> 求二十八宿黄道度：以四正后赤道宿入初、末限度及分，减一百一度，余以初、末限度及分乘之，进位，满百为分，分满百为度。至后以减、分后以加赤道宿积度，为其宿黄道积度。①

四正即冬至点、夏至点、春分点、秋分点。太阳在这4个点上的极黄经与赤经相等，即此时黄赤道差为0，四正将赤道等分为4个象限，每象限在《纪元历》中合91.3109度，此数恰为《纪元历》

---

①宋史律历志(卷79). 中华书局编. 历代天文律历等志汇编(8). 北京：中华书局，1976，2805。

回归年长度的四分之一。

古人认为，黄赤道差在此4象限间呈镜面对称，并且假定在任一象限内，当以赤道度 x 为自变量时，其黄赤道差亦呈镜面对称。因此，将每象限又等分之，当 $x<45.65545$ 度时，为入初限，否则，令其反减91.3109，余数为入末限。简而言之，设已知二分或二至前后赤道度 $x<45.65545$ 度，则其黄赤道差 $(y-x)$ 为

$$|y-x|=\frac{x(101-x)}{1000}$$

设 y 表示相对应的极黄经度，则在两至点前后 $x<45.65545$ 度时

$$y=x-\frac{x(101-x)}{1000} \tag{6-3}$$

在两分点前后 $x<45.65545$ 度时

$$y=x+\frac{x(101-x)}{1000} \tag{6-4}$$

《纪元历》与其前任历法之不同在于，它在给出了式(6-3)与式(6-4)之后，又以两分、两至点前后的黄道度 y 为自变量，反求其赤道度 x：

> 求每日午中赤道日度：以所求日午中黄道积度，入至后初限、分后末限度及分秒，进三位，加二十万二千五十少，开平方除之，所得，减去四百四十九半，余在初限者，直以二至赤道日度加而命之；在末限者，以减象限，余以二分赤道日度加而命之，即每日午中赤道日度。以所求日午中黄道积度，入至后末限、分后初限度及分秒，进三位，用减三十万三千五十少，开平方除之，所得以减五百五十半，余在初限者，直以二分赤道日度加而命之；在末限者，以减象限，余以二至赤道日度加而命之，即每日午中赤道日度。①

①宋史律历志(卷79)．历代天文律历等志汇编(8)．2807～2808。

我们先解释一下“二分二至后初末限”的划分：这里的初、末限，是指黄道上每一象限的前后两个部分，它与赤道上的划分不同，取

二至后初限为 43.1287 度，末限为 48.1822 度

二分后初限为 48.1822 度，末限为 43.1287 度

其中，$43.1287+48.1822=91.3109$ 度 $=1$ 个象限长度。这个初、末限是如何确定的呢？原来它取自式(6-3)与式(6-4)。以冬至到春分这一象限为例：当冬至后赤道度 $x\leqslant 45.65545$ 度时，为入冬至后赤道初限，相应之黄道值 y 按式(6-3)计算。此时式(6-3)的定义域为$0\leqslant x\leqslant 45.65545$ 度，由此易知，式(6-3)的值域恰为 $0\leqslant y\leqslant 43.1287$。又，当春分前赤道度 $x\leqslant 45.65545$ 度时，为入冬至后赤道末限，相应之黄道值 y 按式(6-4)计算。由于式(6-4)的定义域为 $0\leqslant x\leqslant 45.65545$ 度，易知，其值域当为 $0\leqslant y\leqslant 48.1822$度。

这便是《纪元历》取冬至后黄道初、末限分别为 43.1287 度与 48.1822 度之原因。其他 3 个象限与之类同，由镜面对称知，夏至后情形与冬至后相同，而春分或秋分后黄道初、末限应与冬至后情形相反。按冬至及夏至前后黄道度 $y\leqslant 43.1287$ 度时，根据式(6-3)，立得

$$x^2+899x-1000y=0$$

因为 $x\geqslant 0$，所以取其正根为

$$x=-449.5+\sqrt{202\,050.25+1000y} \tag{6-5}$$

当春分及秋分前后黄道度 $y\leqslant 48.1822$ 度时，根据式(6-4)，立得

$$x^2-1101x+1000y=0$$

因为 $y=0$ 时，$x=0$，所以取上式之正根为

$$x=550.5-\sqrt{303\,050.25-1000y} \tag{6-6}$$

由于式(6-5)的定义域 $0\leqslant y\leqslant 43.1287$ 与式(6-6)的定义域 $0\leqslant y\leqslant 48.1822$分别为二次函数式(6-3)与式(6-4)的值域，这一值

域与定义域明确的相互界定，使得我们看到，姚舜辅在此确凿无误地创造了反函数的实例。

《纪元历》的这两个求根公式，既是中算史上最早明确出现的反函数例证，也是迄今为止在中国古代数理天文学中可以看到的代数方程求根公式之应用的第二、三个实例。尽管其类型及所获正根公式与赵爽之式(6-1)及一行之式(6-2)相类同，但顾及中算家通常仅以增乘开方法推求代数方程数值解的历史背景，此类算法的出现与应用理当引人注目，因此，便具备了一定的史料价值。需要指出的是，《纪元历》的上述算法，还得到了金代《知微历》(1180，《金史历志》卷21)与元代《庚午元历》(1220，《元史历志》卷56)的抄用。

第二节 双二次函数

边冈《崇玄历》(892)之后的唐宋历法在计算太阳视赤纬与昼夜漏刻时，给出了一系列四次多项式函数，[4] 如果说这些函数系依内插法导得，那么，每个函数至少应有五个点的值系取自实测。但从其结构上的分析发现，它们皆为两种不同的复合函数，实际上只需取三个不同的插值点即可获得。笔者的考察表明，唐宋元历法中出现的这些四次多项式函数，都是根据某种独特的几何模型利用圆与勾股形的关系推导出来的。本节先讨论边冈在计算太阳视赤纬时构建的双二次函数模型。

一、《崇玄历》太阳视赤纬算法模型

《崇玄历》中的求每日黄道去极度公式是中国历法史上第一例四次多项式函数，它对后世历法同一项目算法的构造产生了十分明显和持久的影响。依《崇玄历》术文：

又计二至加时已来至其日昏后夜半日数及余。……

如一象已下，为初；已上，反减二至限，余为末。令自相乘，进二位，以消息法（1667.5）除为分，副之。与五百分先相减，后相乘，千八百而一，以加副，为消息数。以象积（480）乘之，百约为分，再退为度。[①]

假设 x 表示二至后太阳在黄道上的实际行度（相当于太阳的黄经），根据陈美东的疏解，按照上述文字，可列如下算式

$$\theta(x)=\frac{480}{10^4}\times\left[\frac{100x^2}{1667.5}+\frac{\left(500-\frac{100x^2}{1667.5}\right)\times\frac{100x^2}{1667.5}}{1800}\right] \quad (6\text{-}7)$$

其中，$x\leqslant 91.3131$（一象限度分）；若 $x>91.3131$，则需以 182.6262 反减之。若以 $f(x)$ 表示太阳距北赤极度，则依术知春分后

$$f(x)=67.40+\theta(x)$$

而秋分后

$$f(x)=115.20-\theta(x)$$

于是知《崇玄历》取黄赤大距

$$\varepsilon=(115.20-67.40)/2=23.90\text{ 度}$$

所以，任一时刻太阳的视赤纬 $\delta(x)$ 应如

$$\delta(x)=\pm[\varepsilon-\theta(x)]$$

春分后取“+”，秋分后取“-”。由上面的公式可知，欲求太阳的去极度及其视赤纬，只需计算式（6-7）。因此，探讨《崇玄历》太阳视赤纬算式之由来，亦只需考察式（6-7）。以下为了讨论方便起见，令 $a\approx 91.31$ 度，表示各历黄道度之一象限的度分。于是有

$$\frac{x^2}{5\times1667.5}\approx\frac{x^2}{91.31^2}=\frac{x^2}{a^2}$$

所以式（6-7）变为

$$\theta(x)=24\times\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\times\frac{x^2}{a^2}}{3.6}\right] \quad (6\text{-}8)$$

①新唐书历志（卷30下）．历代天文律历等志汇编（7）．2354。

其中,$0 \leqslant x \leqslant a$。式(6-8)中的24表示常数$\varepsilon$(各历黄赤大距之约取值),而$3.6 = 1800/500$成为唯一的待定系数。因为

$$|\delta(0)| = \varepsilon, \delta(a) = 0$$

所以

$$\theta(0) = 0, \theta(a) = \varepsilon$$

因此,边冈在建立式(6-7)或式(6-8)时,仅仅用到了包括$x = 0$、a在内的三个不同的插值点。式(6-8)可以化为

$$\theta(x) = \varepsilon\left[y + \frac{(1-y)y}{b}\right], y(x) = \frac{x^2}{a^2} \qquad (6\text{-}9)$$

其中,$0 \leqslant y(x) \leqslant 1$,$\varepsilon$为常数,$b$为唯一待定系数。于是,问题转化为:式(6-9)的数学模型究竟是如何建立的呢?

二、几何模型与边冈算法的构造

显而易见,式(6-9)并不是普通的插值函数,它的构造与内插法之类的数值方法是不同的。我们知道,对于一般的插值函数的构造,可以不必考虑被插函数的几何模型。但是,由于式(6-9)的特殊性,使得我们不能忽视它所对应的天体运动的几何模型。受郭守敬《授时历》中白道交周算法的启发(本章第四节),我们不妨假定边冈也是通过构造某种类似的几何模型来推导式(6-9)的。

1. 构造边冈算法的几何模型

如图6-1所示,黄道与赤道相交于两分点A、C,点S表示太阳,点P、K分别表示北赤极、黄极。PSF为过太阳S的赤经圈,与赤道交于点F。因此,弧段$SF = \delta$即为所求之太阳的视赤纬。

我们将图6-1中的黄道面垂直地投影在平面上,如图6-2所示,直径ABC为黄道投影,点A、B、C分别表示春分、夏至、秋分点。以B为心的虚线圆表示天球在平面上的投影(即过两分点A、C的黄经圈)。图6-1中的赤道圈,投影为图6-2中的大圆$P-ADCE$,其中,圆心P表示北赤极,弧ADC为图6-1中外侧的半个赤道的

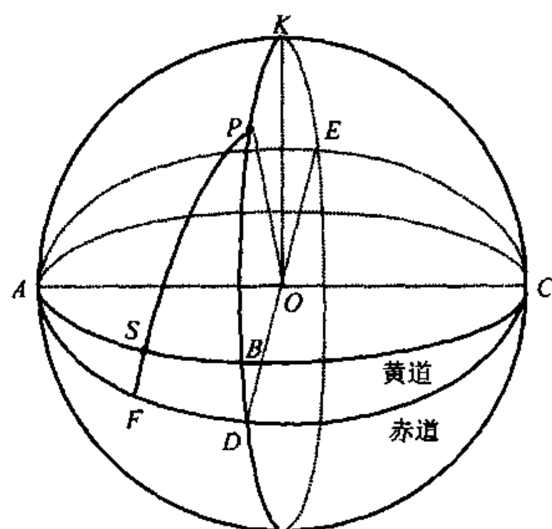


图 6-1 太阳的视赤纬

投影,而大圆弧 AEC 为图 6-1 中内侧的半个赤道的投影。

在图 6-2 中,令以点 P 为圆心,PB 为半径作一个圆,与过太阳 S 的赤经圈(PSF)交于点 H,与过春分点 A 的赤经圈(PA)交于点 G,于是可令黄赤大距 $\varepsilon = BD = HF = GA$。

如图 6-1,设 x 表示夏至前第 x 日,按太阳日行一度,则 x = 弧 SB;弧 $SF = \delta(x)$ 表示夏至前第 x 日太阳的视赤纬,令 a = 弧 AB,表示一个象限的长度。则将图 6-1 投影如图 6-2 时,近似地我们有

$$SB : AB = x : a$$

并且
$$HS = \theta(x) = \varepsilon - \delta(x)$$

因为
$$AB^2 = AP^2 - PB^2, BS^2 = PS^2 - PB^2$$

所以
$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{BS^2}{AB^2} = \frac{(PS+PB)(PS-PB)}{(AP+PB)(AP-PB)} = \frac{(2a-2\varepsilon+\theta)\theta}{(2a-\varepsilon)\varepsilon}$$

于是
$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{\theta}{\varepsilon} - \frac{\left(1-\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\frac{\theta}{\varepsilon}}{(2a-\varepsilon)/\varepsilon}$$

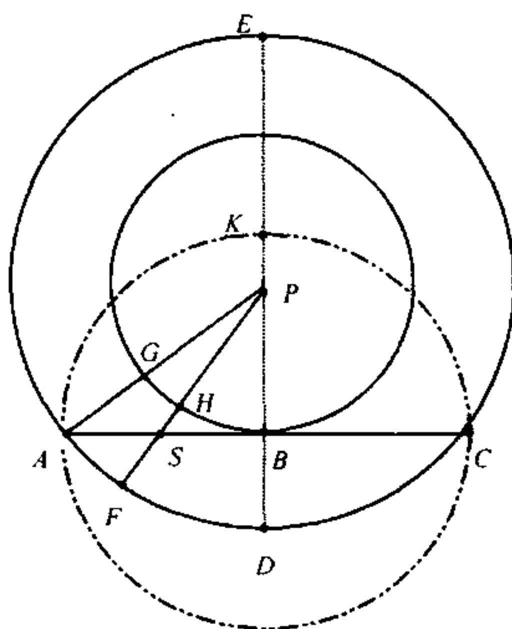


图 6-2　《崇玄历》太阳视赤纬算法的构造

上式可以化为

$$\theta = \varepsilon\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(1 - \frac{\theta}{\varepsilon}\right)\frac{\theta}{\varepsilon}}{b}\right] \tag{6-10}$$

其中，$b = (2a - \varepsilon)/\varepsilon$。若令$\frac{\theta}{\varepsilon} = \frac{x^2}{a^2} = y$，则有

$$\theta(x) = \varepsilon\left[y + \frac{(1-y)y}{b}\right], y(x) = \frac{x^2}{a^2}$$

此即式(6-9)。

2. 系数 b 的确定

关于式(6-10)中的系数 b 的确定，可以做如下的分析：根据图 6-2，我们可以知道

$$b = \frac{2a}{\varepsilon} - 1 = \frac{2AP}{AG} - 1$$

其中,AP 为天球的半径,即 1/4 圆周在平面上的投影;$AG=DB$,表示天球上黄赤大距弧段($\varepsilon=24$ 度 $=23.6°$)在平面上的投影。假设半径 $AP=1$,黄赤大距弧段所对应的弦 $AG=\sin\varepsilon=0.40$,因此

$$b=\frac{2AP}{AG}-1=4.0$$

这个数值正好介于边冈的算法($b=3.6$)与宋代《崇天历》、《明天历》、《观天历》($b=4.44$)之间。

应当指出的是,式(6-9)的构建过程中因将天球投影到平面而产生的变形误差是不能完全忽略的,因此,式中之系数 b 不能径直采用 $b=(2a-\varepsilon)/\varepsilon$,这一点当时的历家在考验其算式吻合程度时一定是注意到了。所以,式(6-9)的确立,具有给出太阳视赤纬算法之数学模型的意义,至于系数 b 的选择,尚需以一个实测插值数据来定夺。对于《崇玄历》来说,其式(6-7)各常系数有这样的关系

$$5\times1667.5=91.31^2=a^2,500=24\times\frac{10\ 000}{480}=\varepsilon\times\frac{10^4}{480}$$

《崇玄历》在式(6-7)第二项中取 500 为一因子的理由,可能是为了计算上的某种方便,因为古人运筹习惯于整数计算,而算子 $100x^2/1667.5$ 作为一个可单独取值的运算量在计算时精确到个位数取整值,便于后续之运算,这个算子不应太大,否则计算过繁,亦不应太小,否则精度无法保证,于是取 $0\leqslant100x^2/1667.5\leqslant500$,这个范围看来是适中的。这是笔者的揣测。

由式(6-8)知,《崇玄历》待定系数 $b=1800/500$,这一数值是如何得来的呢? 由于

$$\theta(x)=\varepsilon-|\delta(x)|$$

其中,$0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant\theta(x)\leqslant\varepsilon$,假定 $x=a/2$ 为插值点,令 $\varepsilon=24$ 度,据实测知 $\delta(a/2)=16.75$ 度。所以 $\theta(a/2)=7.25$,于是由式(6-8)立得

$$b=\frac{(1-0.25)\times0.25\times24}{7.25-0.25\times24}=3.6=\frac{1800}{500}$$

笔者认为,以上便是边冈建立《崇玄历》太阳视赤纬算法的大致过程。图 6-1 给出的几何模型虽然是夏至前后的情况,但由对称性,冬至前后之情形不难推知。

3. 误差分析

最后一个问题,由式(6-10)到式(6-9)因 $\Delta=\frac{\theta}{\varepsilon}-\frac{x^2}{a^2}$ 而产生的舍入误差到底有多大呢? 将 $y=x^2/a^2$ 及 $\theta/\varepsilon=\Delta+y$ 代入式(6-10),则有

$$\theta=\varepsilon\left[y+\frac{(1-y-\Delta)(y+\Delta)}{b}\right]=\varepsilon\left[y+\frac{(1-y)y}{b}\right]+\frac{\varepsilon(1-2y-\Delta)\Delta}{b}$$

因为
$$0\leqslant 2y+\Delta=y+\theta/\varepsilon\leqslant 2$$

且
$$0\leqslant\Delta=\frac{(1-\theta/\varepsilon)(\theta/\varepsilon)}{b}\leqslant\frac{1}{4b}$$

所以
$$\left|\theta-\varepsilon\left[y+\frac{(1-y)y}{b}\right]\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4b^2}$$

若取 $b=4.0$, $\varepsilon=24$ 度,则根据式(6-10)与式(6-9)计算的太阳视赤纬的舍入误差将不超过

$$\frac{\varepsilon}{4b^2}=0.375(\text{度})$$

三、边冈算法与泰勒级数

以上我们探讨了边冈构造函数式(6-7)的几何模型,下面让我们进一步分析一下这个双二次函数与理论推导的一些有趣的关系。已知三角函数的级数展开

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\cdots+\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

利用图 6-1，令弧 $SB=x$，$\angle BAD=\varepsilon$，弧 $SF=\delta(x)$，则有

$$\sin\delta=\sin\varepsilon\cos x \tag{6-11}$$

根据式(6-11)，当将太阳的视赤纬 $\delta(x)$ 展开成黄道度 x 的幂级数时

$$\delta=\sin\varepsilon\cos x+\frac{(\sin\varepsilon\cos x)^3}{6}+\frac{3(\sin\varepsilon\cos x)^5}{40}+\cdots$$

$$=\varepsilon-\left(\varepsilon+\frac{\varepsilon^3}{3}\right)\frac{x^2}{2}+\left(\varepsilon+\frac{10\varepsilon^3}{3}\right)\frac{x^4}{24}-\cdots$$

得到的是一个全部为偶次幂的函数。若省略 ε^3，x^6 以及更高次幂的项，则有

$$\theta_2(x)=\varepsilon-\delta=\varepsilon\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right) \tag{6-12}$$

理论推导的结果，太阳的视赤纬 δ 也是以其黄道度 x 为自变量的一个双二次函数。比较式(6-12)与式(6-9)可以看出，边冈在其《崇玄历》中将太阳视赤纬算法设计成一个双二次函数是很有道理的。假设取黄道度 x 为弧度，则 $2a=\pi$，于是，式(6-9)可以表示为

$$\theta_1(x)=\varepsilon\left(\frac{4+4b}{b\pi^2}x^2-\frac{16}{b\pi^4}x^4\right) \tag{6-13}$$

通过比较式(6-12)与式(6-13)两个函数的系数，进一步考察边冈算法式(6-9)与泰勒展开式(6-12)之间的关系，我们可以得到如下结果：若令 $b=\dfrac{8}{\pi^2-8}=\dfrac{16\times24}{\pi^4}$，即 $\pi^4-48\pi^2+384=0$，则 $\pi=\sqrt{24-8\sqrt{3}}=3.1849$。考虑到中国传统历法直到《授时历》(1280)仍然取 $\pi=3$，这个圆周率是相当精确的。

若令 $\pi^2=\dfrac{8+8b}{b}$，$\pi^4=\dfrac{16\times24}{b}$，即 $b^2-4b+1=0$，则 $b=2+\sqrt{3}=3.73$。边冈的算法中，取 $b=3.6$。由此可见，边冈算法式(6-7)是相当合理的。

但是，更有意思的还在下面：如果令黄赤大距 $\varepsilon=23.5°$，根据

下面的公式

$$\delta = \arcsin(\sin\varepsilon\cos x)$$

$$\delta_1 = \varepsilon - \varepsilon\left[\gamma + \frac{(1-\gamma)\gamma}{3.6}\right], \gamma = \left(\frac{2x}{\pi}\right)^2$$

$$\delta_2 = \varepsilon - \varepsilon\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)$$

按照理论函数 δ，根据式(6-13)($b=3.6$)的边冈算法 δ_1，根据式(6-12)的泰勒展开 δ_2 分别计算太阳视赤纬，可以得到表 6-1 与图 6-3。令人惊异的是，边冈算法的精度竟然是同级的泰勒级数展开的精度的 4 倍多。

表 6-1　边冈算法与泰勒展开的精度比较

x	15	30	45	60	75	90
δ	22.65	20.20	16.38	11.50	5.92	0
δ_1	22.67	20.24	16.40	11.44	5.80	0
$\delta_1-\delta$	0.02	0.04	0.02	-0.06	-0.13	0
δ_2	22.70	20.35	16.62	11.79	6.24	0.47
$\delta_2-\delta$	0.05	0.15	0.25	0.29	0.32	0.47

注：边冈算法的绝对平均误差为 $|\delta_1-\delta| = 0.05°$，同级的泰勒展开精度 $|\delta_2-\delta| = 0.23°$。

若将太阳视赤纬 δ 的泰勒级数中的黄赤大距 ε 取至 3 次项，即

$$\delta_2 = \varepsilon - \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{3}\right)\frac{x^2}{2} + \left(\varepsilon + \frac{10\varepsilon^3}{3}\right)\frac{x^4}{24}$$

则当 $x<40°$ 时，泰勒级数精度高于边冈算法，但是，在 $x>40°$ 时，泰勒级数的误差变得更大，整个定义域内的绝对平均误差达到 0.44°。

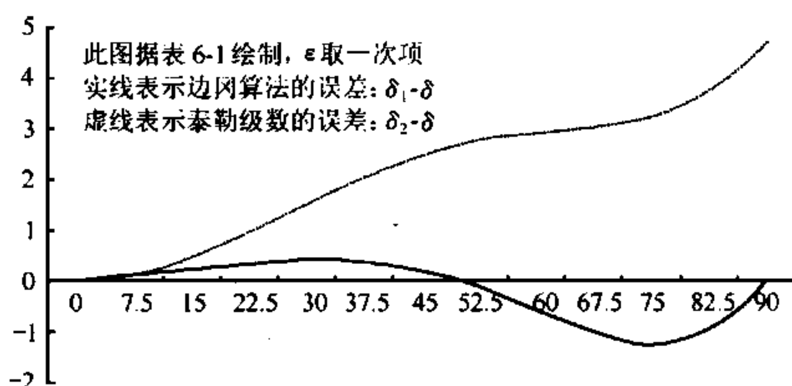


图6-3 边冈算法与泰勒级数 δ 的误差比较

四、北宋四历太阳视赤纬算式的构建

《崇玄历》之后，又有北宋的四部名历相继沿用边冈的算法建立各自的太阳视赤纬算式，它们依次是：史序的《仪天历》(1001)、宋行古的《崇天历》(1024)、周琮的《明天历》(1064)及皇居卿的《观天历》(1092)。由于《仪天历》与后三历情形稍有差异，姑且先讨论后三历之算式的建立。各历的太阳视赤纬 $\delta(x)$ 均按下面的算式给出

$$|\delta(x)| = \varepsilon - \theta(x)$$

其中的辅助函数 $\theta(x)$ 均按照下面的形式给出

$$\theta(x) = \frac{20\varepsilon}{A} \times \left[\frac{Ax^2}{20a^2} + \frac{\left(\frac{A}{20} - \frac{Ax^2}{20a^2}\right) \times \frac{Ax^2}{20a^2}}{bA/20} \right] \tag{6-14}$$

式(6-14)中的 A 表示日法(各天文周期常数的公分母)；$a = 91.31$ 度，表示一个象限的长度；ε 为黄赤大距；b 为一个常数。

显而易见，如果将式(6-14)括号中的公因子($A/20$)提出来，它立刻化为式(6-9)。

1.《崇天历》算法

《崇天历》的太阳视赤纬算法(求每日黄道去极度及赤道内外度)记载在《宋史律历志》卷 72。根据陈美东的疏解(文献[4]),这个算法的主要部分归结为如下算式

$$\theta(x)=\frac{16}{353}\times\left[\frac{500x^2}{7873}+\frac{\left(529.5-\frac{500x^2}{7873}\right)\times\frac{500x^2}{7873}}{2350}\right]$$

其中,$0\leqslant x\leqslant 91.31$,若 $x>91.31$,需以 182.62 反减之。以下《明天历》与《观天历》与此相同,不再说明。《崇天历》日法 $A=10\ 590=20\times 529.5$,令黄赤大距 $\varepsilon=24$,$a=91.31$,则上式中各项数据之间有如下关系

$$529.5=\varepsilon\times\frac{353}{16},\frac{7873\times 529.5}{500}=a^2$$

若令
$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{500x^2}{7873\times 529.5},b=\frac{2350}{529.5}=4.44$$

则《崇天历》函数 $\theta(x)$ 即化为式(6-14)。于是,《崇天历》太阳视赤纬算法的构造,最终取决于系数 b 的确定。这个值是在$x=45.60$ 度($\approx a/2$)时,根据式(6-14),按照插值所得 $\delta(45.60)=17$ 度而推算出来的结果。

2.《明天历》算法

《明天历》的太阳视赤纬算法(求每日黄道去极度及赤道内外度)记载在《宋史律历志》卷 75。根据陈美东的疏解(文献[4]),这个算法的主要部分归结为如下算式

$$\theta(x)=\frac{4}{325}\times\left[\frac{10\ 000x^2}{4\times 10\ 689}+\frac{\left(1950-\frac{10\ 000x^2}{4\times 10\ 689}\right)\times\frac{10\ 000x^2}{4\times 10\ 689}}{8650}\right]$$

《明天历》日法 $A=39\ 000=20\times 1950$,令黄赤大距 $\varepsilon=24$,$a=91.31$,则上式中各项数据之间有如下关系

$$1950=\varepsilon\times\frac{325}{4},\frac{4\times10\ 689\times1950}{10\ 000}=a^2$$

若令 $$\frac{x^2}{a^2}=\frac{10\ 000x^2}{4\times10\ 689\times1950},b=\frac{8650}{1950}=4.44$$

则《明天历》函数 $\theta(x)$ 即化为式(6-14)。于是《明天历》太阳视赤纬算法的构造,最终也取决于系数 b 的确定。这个值也是在 $x=45.60$ 度($\approx a/2$)时,根据式(6-14),按照插值所得 $\delta(45.60)=17$ 度而推算出来的。

3.《观天历》算法

《观天历》的太阳视赤纬算法记载在《宋史律历志》卷77。根据陈美东的疏解,[4]这个算法的主要部分归结为如下算式

$$\theta(x)=\frac{16}{401}\times\left[\frac{700x^2}{9703}+\frac{\left(601.5-\frac{700x^2}{9703}\right)\times\frac{700x^2}{9703}}{2670}\right]$$

《观天历》日法 $A=12\ 030=20\times601.5$,令黄赤大距 $\varepsilon=24$,$a=91.31$,则上式中各项数据之间有如下关系

$$601.5=\varepsilon\times\frac{401}{16},\frac{9703\times601.5}{700}=a^2$$

若令 $$\frac{x^2}{a^2}=\frac{700x^2}{9703\times601.5},b=\frac{2670}{601.5}=4.44$$

则《观天历》函数 $\theta(x)$ 即化为式(6-14)。于是《观天历》太阳视赤纬算法的构造,最终也取决于系数 b 的确定。这个值也是在 $x=45.60$ 度($\approx a/2$)时,根据式(6-14),按照插值所得 $\delta(45.60)=17$ 度而推算出来的。

4.《仪天历》算法

如果说前面所述几部历法都是依平气日(x)来推算相应的太阳视赤纬 $\delta(x)$,那么,《仪天历》则系按定气日来计算太阳视赤纬。《仪天历》的太阳视赤纬算法(求每日黄道去极度及赤道内外度)

记载在《宋史律历志》卷 69。根据陈美东的疏解，[4]这个算法的主要部分归结为如下两个算式：当冬至前后 $x \leqslant 88.8811$ 日时

$$\theta_1(x)=\frac{50}{1060}\times\left[\frac{10\,000x^2}{156\,428}+\frac{\left(505-\frac{10\,000x^2}{156\,428}\right)\times\frac{10\,000x^2}{156\,428}}{2850}\right]$$

当夏至前后 $x \leqslant 93.7412$ 日时

$$\theta_2(x)=\frac{50}{1052}\times\left[\frac{10\,000x^2}{174\,003}+\frac{\left(505-\frac{10\,000x^2}{174\,003}\right)\times\frac{10\,000x^2}{174\,003}}{5552}\right]$$

已知《仪天历》宗法（日法）$A=10\ 100=20\times505$，则有黄赤大距

$$\varepsilon_1=\frac{50A}{20\times1060}=23.82,\ \varepsilon_2=\frac{50A}{20\times1052}=24$$

令 $a_1=88.88, a_2=93.74$，则

$$\frac{10\,000a_1^2}{505}=156\,428.8,\ \frac{10\,000a_2^2}{505}=174\,003.7$$

又令

$$b_1=\frac{2850}{505}=5.64,\ b_2=\frac{5552}{505}=11.0$$

于是，《仪天历》函数 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$ 均化为式(6-14)的形式。由此可见，《仪天历》太阳视赤纬函数 $\delta(x)$ 的构造，也是依赖于常数 b 的确定。它给出的两个函数的常数 b_1 与 b_2，都有些大。这两个常数是否有误？它们是如何推算出来的？仍然是一个问题。

第三节　复合函数

姚舜辅的《纪元历》(1106)可以说是宋代最好的一部历法，被完整地保存在《宋史律历志》卷 79～80。与边冈《崇玄历》的双二次函数不同，在《纪元历》中，姚舜辅构造了一例漂亮的复合函数来计算太阳的视赤纬。这个算法模型，甚至还被他用来推导计算月亮的极黄纬公式。

一、《纪元历》太阳视赤纬算法模型

在12世纪之前,求每日太阳视赤纬的算法基本上袭承边冈创立的模式,姚舜辅在他的《纪元历》中率先改造了边冈的数学模型式(6-14)。他所建立的太阳视赤纬算法在郭守敬《授时历》(1280)制定之前,曾经为多家历法所采用。

假设以x表示距离二至前后的日数,则按《纪元历》"求每日赤道内外度"术文(《宋史律历志》卷79),可以知道,冬至前后$x\leqslant 91.3109$日时,第x日太阳视赤纬

$$\begin{aligned}\delta_1(x) &= -\frac{(182.6218-y_1)y_1}{348.856}(\text{度}) \\ y_1(x) &= 91.3109-\left[x+\frac{(91.3109-x)x}{517}\right]\end{aligned}\tag{6-15}$$

夏至前后$x\leqslant 91.3109$时,类似有第x日太阳视赤纬

$$\begin{aligned}\delta_2(x) &= \frac{(182.6218-y_2)y_2}{348.856}(\text{度}) \\ y_2(x) &= 91.3109-\left[x+\frac{(91.3109-x)x}{400}\right]\end{aligned}\tag{6-16}$$

如果令$a=91.3109$,$\varepsilon=23.90$,则有

$$\frac{a^2}{\varepsilon}=348.856$$

由此可知,《纪元历》太阳视赤纬算法模型可表示为

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \frac{(2a-y)y}{a^2/\varepsilon} \\ y &= a-\left[x+\frac{(a-x)x}{b}\right]\end{aligned}\tag{6-17}$$

其中,$0\leqslant x\leqslant a=91.3109$,$\varepsilon=23.90$,常数$b$待定。由于$0\leqslant y\leqslant a$,且

$$y(0)=a\text{ 时},\delta(0)=\varepsilon;y(a)=0\text{ 时},\delta(a)=0$$

所以,姚舜辅构造的复合函数式(6-17)的确立,实质上等于在区间 $[0,a]$ 上任取 $x=0,a$ 及其他一个不同的点做插值所推导出来的四次多项式函数。换句话说,如果算法模型(6-17)已经确立,则只需要在区间 $(0,a)$ 内寻找一个插值点,将常数 b 确定,则太阳视赤纬函数 $\delta(x)$ 就可以确定了。

现在的问题是,姚舜辅是如何推导出他的算法模型式(6-17)的?

二、几何模型与复合函数的构造

毫无疑问,姚舜辅的算法模型式(6-17)是一个非常漂亮的复合函数,它显然不是一个简单的数值算法,很难想像,如果没有一定的几何模型,如何导出这样的函数。

1. 复合函数的几何模型

与边冈建立《崇玄历》太阳视赤纬算法模型类似,我们也是通过将立体的天球(图 6-1)投影到平面上,来建立《纪元历》的太阳视赤纬算法的几何模型。

如图 6-4 所示,以点 B 为心的虚线圆表示天球的投影,将图 6-1 中的黄道面垂直地投影在平面上,如图 6-4 中的直径 ABC,其中点 A、B、C 分别表示春分点、夏至点(冬至点)、秋分点的投影。

如图 6-1,设 x 表示夏至前第 x 日,按太阳日行一度,则 $x=$ 弧 SB;弧 $SF=\delta(x)$ 表示夏至前第 x 日太阳的视赤纬,令 $a=$ 弧 AB,表示一个象限的长度。

将图 6-1 投影如图 6-4 时,近似地我们有圆 P—$ADCE$ 表示赤道圈,P 为北赤极。弧 ADC 为图 6-1 中外侧的半个赤道的投影,而大圆弧 AEC 为图 6-1 中内侧的半个赤道的投影。

图 6-4 中的点 S 表示太阳的投影,过 S 的赤经圈与赤道交于点 F。令以点 P 为圆心,PS 为半径作一个圆,与赤道的直径 DE 分

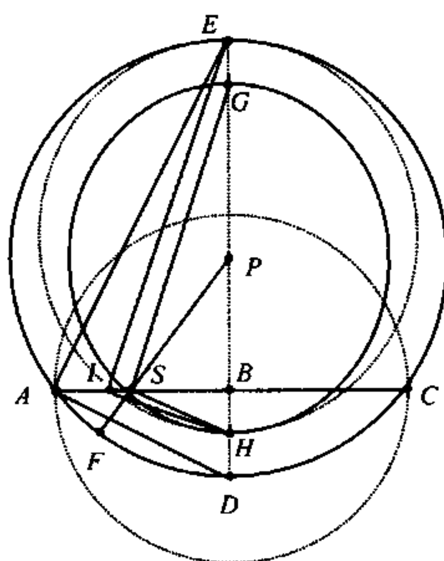


图 6-4　《纪元历》太阳赤纬的几何模型

别相交于点 H,G。再以 HE 为直径,作一个圆,与黄道 AC 相交于点 I。令

$$\frac{SB}{AB}=\frac{x}{a},\frac{AI}{AB}=\frac{y}{a}$$

则

$$\frac{IB}{AB}=\frac{a-y}{a}$$

记　$PD=a,BD=\varepsilon,BH=\theta(x),DH=\delta(x)$

于是　$BG=2a-2\varepsilon+\theta,BE=2a-\varepsilon$

因为　$SB^2=BH\times BG,AB^2=BD\times BE$

所以

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{SB^2}{AB^2}=\frac{\theta\times BG}{\varepsilon\times BE}$$

又

$$\frac{\theta}{\varepsilon}=\frac{SB^2\times BE/BG}{AB^2}=\frac{BH\times BE}{AB^2}=\frac{IB^2}{AB^2}=\frac{(a-y)^2}{a^2}$$

所以

$$\frac{\delta}{\varepsilon}=1-\frac{\theta}{\varepsilon}=\frac{(2a-y)y}{a^2}$$

故得
$$\delta=\frac{(2a-y)y}{a^2/\varepsilon} \tag{6-18}$$

而由
$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{(a-y)^2}{a^2}\times\frac{BG}{BE}$$

得
$$y=a-x\sqrt{BE/BG}$$

由图 6-4 可知，$BE\geqslant BG$，因 $x=a$ 时，$BE=BG$，所以，可取 $\sqrt{BE/BG}$ 为如下形式的线性函数（x 为自变量）

$$\sqrt{BE/BG}=1+\frac{a-x}{b} \tag{6-19}$$

其中，b 为待定常数。根据式(6-19)，可以得到

$$y=a-\left[x+\frac{(a-x)x}{b}\right] \tag{6-20}$$

联立式(6-18)与式(6-20)，即得《纪元历》太阳视赤纬算法之数学模型(6-17)。

2. 关于常数 b

《纪元历》算法中常数 b 值的确定，可做如下推测：以冬至前后 $x\leqslant 91.31$ 为例，假定 $x=45$ 时，实测视赤纬 $\delta=-17$ 度，按

$$17=\frac{(182.62-y)y}{349}$$

解得 $y\approx 42.28$，由

$$42.28=91.31-\left[\frac{(91.31-45)\times 45}{b}+45\right]$$

推得 $b=517.11\approx 517$。

那么，姚舜辅通过选择插值点（如 $x=45$）而校正的 b 值与上述理论推导的误差有多大呢？我们试做如下分析：因为

$$\sqrt{BE/BG}=1+\frac{a-x}{b}$$

所以　$$b=\frac{(a-x)\left[1+\sqrt{BE/BG}\right]\times BG}{BE-BG}=\frac{(a-x)\left(BG+\sqrt{BE\times BG}\right)}{BE-BG}$$

因为 $$BE=2a-\varepsilon, BG=2a-\varepsilon-(\varepsilon-\theta)$$

令 $\alpha=\frac{2a}{\varepsilon}-1, \frac{\theta}{\varepsilon}\approx\frac{x^2}{a^2}$,则

$$b=\frac{(a-x)\left[\alpha+\sqrt{\alpha(\alpha-1+x^2/a^2)}\right]}{1-x^2/a^2}-a+x$$

$$=\frac{a\left[\alpha+\sqrt{\alpha(\alpha-1+x^2/a^2)}\right]}{1+x/a}-a+x$$

因为 $b(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant a$ 上单调下降,所以有 $b(a)\leqslant b\leqslant b(0)$。又因为

$$b(0)=a\left[\alpha+\sqrt{\alpha(\alpha-1)}\right]-a\leqslant a\left[\alpha+(\alpha-1/2)\right]-a=\frac{4a^2}{\varepsilon}-3.5a$$

$$b(a)=a\alpha=\frac{2a^2}{\varepsilon}-a$$

所以 $$\frac{2a^2}{\varepsilon}-a\leqslant b\leqslant\frac{4a^2}{\varepsilon}-3.5a$$

若令 $a=91.31, \varepsilon=23.90$,则有 $606\leqslant b\leqslant 1075$。由此可见,依图6-4模型推导的太阳视赤纬算式之 b 值,要比原始算法按插值法校正之 $b=517$ 及 400 均稍大一些。

三、《纪元历》的月亮极黄纬算法

与太阳视运动相比较,月亮的变化则要复杂得多。《纪元历》之前,各历基本上都是采用分段抛物插值法来推算任意时刻的月亮极黄纬,其算法的建立皆未参照月亮运动的几何模型。这种状况首先为姚舜辅所突破,他在《纪元历》中建立的月亮极黄纬算式被《授时历》之前的各部历法所采纳,持续使用了 170 多年。据陈美东的疏解,[5] 依术可列《纪元历》月亮极黄纬 $p(x)$ 之算式如下

$$p(x)=\frac{(181.8972-y)y}{1375}$$

其中
$$y(x)=x-\frac{(90.9486-x)x}{500}$$

令 $a=90.9486=181.8972/2$ 度，表示 1/4 个交点月月亮所行度数，上式中 $0\leqslant x\leqslant a$，表示所求时刻月亮距黄白交点的度数。若按《纪元历》取黄白道夹角 $I=6.015$ 度，则有
$$\frac{a^2}{I}=\frac{90.9486^2}{6.015}=1375$$

所以，令 $b=500$，则《纪元历》的月亮极黄纬算法即可以表示为如下形式的复合函数
$$\begin{aligned}p(x)&=\frac{(2a-y)y}{a^2/I}\\ y(x)&=x-\frac{(a-x)x}{b}\end{aligned}\qquad(6\text{-}21)$$

将式(6-21)与式(6-17)相比较，即可发现《纪元历》太阳视赤纬与月亮极黄纬算式之间的雷同之处，并且可以推断，式(6-21)的建立，也应是利用了图 6-4 之类的几何模型所推导出来的。

中国古代的月去黄道内外度，是按过月亮的赤经圈在黄、白两道之间的夹弧来度量的，由于不同时刻黄白交点与赤极的相对位置是不一样的，因此，严格地说，月亮的极黄纬不是单纯的以月去黄白交点的距离(x)为自变量的一元函数，它还应包含另一个自变量，如黄白交点的赤经或赤纬，也就是说，$p(x)$应是一个二元函数。

不过，由式(6-21)可知，姚舜辅在建立其月亮极黄纬算式时，并未顾及赤极相对于白道所在不同位置而产生的误差，因此，我们在复原《纪元历》算法的时候，无妨以一特殊情形讨论之，其结果对姚舜辅而言，并不失其一般性。

为了利用类似图 6-4 的几何模型，可以考虑黄白交点在春分点(或秋分点)上之情形。如图 6-5，ASB 为白道，AMK 为黄道，AND 为赤道，三道交于春分点 A，K 为夏至点，于是 $BK=I$，$DK=\varepsilon$。

图 6-5　《纪元历》月亮极黄纬算法

设 S 为白道上任意一点，取 $AS = x$；$SM = p(x)$，是为月亮极黄纬；$SN = \delta(x)$，表示月亮赤纬。于是：$SM:MN = I:\varepsilon$，亦即

$$\frac{p(x)}{I} = \frac{\delta(x)}{I+\varepsilon} \tag{6-22}$$

所以，欲求月亮极黄纬 $p(x)$，可先建立其赤纬 $\delta(x)$ 的算式。如图 6-4，设 ABC 为白道，ADC 为赤道，P 为北赤极；A 为春分点，C 为秋分点。记

$$\frac{AS}{AB} = \frac{x}{a}, \frac{AI}{AB} = \frac{y}{a},$$

$$BD = \varepsilon + I, DH = \delta, PD = a$$

与前文推导式(6-18)相类，可得

$$\delta(x) = \frac{(2a-y)y}{a^2/(\varepsilon+I)}$$

由式(6-22)，立得

$$p(x) = \frac{(2a-y)y}{a^2/I}$$

其中，$y = a - (a-x)\sqrt{BE/BG}$。

因为 $BE=2a-(\varepsilon+I)$，$BG=2a-(\varepsilon+I)-\delta$，所以，当 $x=0$ 时，$\delta=0$。又，$BE\geqslant BG$。因此，令

$$\sqrt{BE/BG}=1+\frac{x}{b}$$

其中，$0\leqslant x\leqslant a$，b 待定，于是得 $y=a-(a-x)(1+x/b)$。故有

$$y=x-\frac{(a-x)x}{b}$$

由此，即将式(6-21)导出。

第四节　天元术与几何模型

现在我们回过头来探讨一个很基本的问题，即边冈与姚舜辅构建上述几何模型的算法依据及其历史背景。

从根本上来说，任何一种历法计算，都是某种数值逼近的过程。数值逼近的方法有很多，其中最常用也是最古老的一种便是内插法。早期的中国历法，常采用分段线性插值；刘焯《皇极历》(600)以后，分段抛物插值开始为历家普遍使用；到了元代的《授时历》(1280)，郭守敬又创立了三次多项式插值公式。由于多项式插值的次数与插值点的数目彼此相关，n 个不同的插值点能且仅能确定一个不超过 n 次的多项式插值函数，因此，为了更好地逼近被插函数，中国古代多选择分段内插的方式。也就是说，通过列表格的形式，先给出结点的插值数据，然后在结点之间，建立线性或抛物插值函数。

不过，这样的算法看起来似乎有些琐碎，不如建立一个统一的解析多项式来得便捷，于是，在唐代的历法中开始出现一些公式化的算法，领导这一潮流的先锋人物，当推《崇玄历》的作者边冈。

但是，要在一个较大的区间上建立抛物插值函数来逼近描述一些天文量，其精度有时便难以保证，对于太阳视赤纬的计算即是一例。解决这一矛盾的方法除了在分划较小的区间上分段插值外，还可以用提高插值函数次数及其他方式进行逼近。然而要建立更高阶数的插

值函数却谈何容易！更何况多项式插值函数时常并不具备收敛性与稳定性，有时插值函数的次数越高，与被插函数的逼近效果越差。

一个比较容易想到的两全方案，就是怎样才能构建一个所求天文量的数学（几何）模型，并据此利用当时业已存在的计算方法推导出该天文量的逼近函数。古代西方的天文学常常如此，现代球面天文学理论更是如此。不过，这样的思想方法在中国古代似乎很少使用，除了金代《大明历》(1180)求日月食食限法[6]与元代《授时历》的弧矢割圆诸术之外，①能够举出的其他例子实在是不多。

本节通过对《授时历》中的白道交周算法的分析，一来考察天元术在构建天体运动之几何模型上的应用，二来探讨一下边冈与姚舜辅建立太阳视赤纬算法模型的历史背景。

一、《授时历》的白道交周算法

建立图 6-2 及图 6-4 之类的几何模型，需要具备以下两个条件：第一，从算法上讲，应当掌握圆内接直角三角形的某些性质与定理，比如说，半圆上的内接三角形 AMN（图 6-7）为直角三角形，当 $AB\perp MN$ 时，$AB^2=BM\times BN$；第二，从几何构图上讲，应当具有将天球上的两个大圆展布成图 6-2 或图 6-4 形式的平面图形的习惯。以上两点，可在《明史历志》（卷 32）论述《授时历》法原之白道交周的有关图文中找到一些根据。

《授时历》的白道交周问题，是为了计算白道与赤道之差而特别设计的一段术文，如图 6-6 所示，当黄白交点适与二至点（A、C）重合时，求白赤道交点 E 与二分点 B（即黄赤道交点）之间的距离，此数被称为“白赤道正交距黄赤道正交”的“极数”。

为了求得“极数”BE，《授时历》法原中绘制的图形是：先将天

①明史历志(卷 32). 中华书局编. 历代天文律历等志汇编(10). 北京：中华书局，1976. 3579～3583。

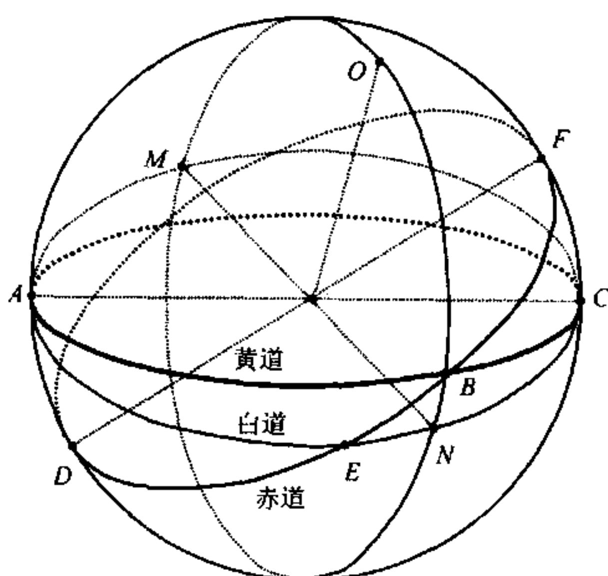


图 6-6　《授时历》白道交周示意图

球投影到与黄道面及赤道面相垂直的平面上，如图 6-7 所示，直径 AC 与 DF 分别为黄道与赤道之投影，A、C 为二至点，B 为二分点投影，小圆为二至圈。

这样的变形如何展布白道在平面上呢？原图取图 6-7 中之大圆为白道之投影，于是 E 为白赤道交点的投影，BE 即为"极数"的投影。

图 6-7 中 BN 为黄白大距的投影，法原中称之为"半弧弦"，按弧矢割圆术可知，此数(BN)约等于其"半弧背"，即黄白大距，因此，法原中直接将 BN 取为"白道出入黄道内外六度"。

图 6-7 中白道与黄道的位置关系，即可作为边冈和姚舜辅将天球上的黄道与赤道展布成图 6-2 与图 6-4 之几何形状的历史沿续。

应当指出的是，《授时历》中大量使用了弧矢割圆的方法，平面上的任何线段都可以通过弧矢公式与其在天球上的弧长联系起来，而在边冈之图 6-2 与姚舜辅之图 6-4 中，问题完全化为平面上

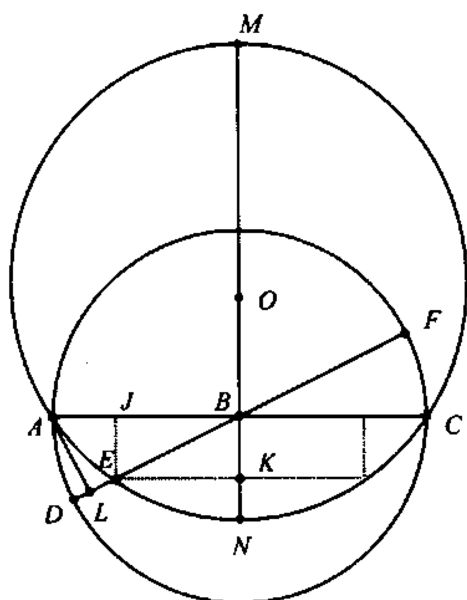


图 6-7　《授时历》的白道交周算法

的勾股形变换，与天球上的弧长不再发生互求之运算关系。正如齐履谦在“知太史院事部公行状”中记述的那样：

> 五曰白道交周。旧法，黄道变推白道，以斜求斜。今用立浑，比量得月与赤道正交距春秋二正黄赤道正交一十四度六十六分。[7]

这当是《授时历》作者的创新，也可以说是对边冈和姚舜辅算法的继承与发展。因此，我们说《崇玄历》与《纪元历》分别按图6-2与图6-4之几何模型推导其太阳视赤纬公式是有其可能性的。

边冈与姚舜辅模型同郭守敬模型的根本差别，即在于后者采用弧矢割圆术将天球上的弧段转换为平面上的线段，因而大大减小了前者通过投影而产生的变形误差。

这种差别的一个明显的结果是，前者依图6-2或图6-4导出了一系列类似的四次多项式函数，而后者则根据图6-7中的关系，推得一个以所求值为未知量的一元二次方程。诚如薄树人指出的

那样，以弧矢割圆术求解白道交周问题所推导的多项式方程，正是元代天元术业已成熟的一个反映。[7]

由此可见，郭守敬的如图 6-7 中天球上白道的投影方式，理应源于图 6-2 及图 6-4 中天球上赤道的投影模式。两者的差别应是历史进步的表现。另外，根据"白道交周"的术文可知，郭守敬计算图 6-7 中大圆直径(MN)的算法为

$$MN = BN + AB^2/BN$$

由于 $MN = BM + BN$，所以，大圆直径 MN 的公式显系由 $AB^2 = BN \times BM$ 而来。从算法来看，图 6-2 与图 6-4 的运算完全是勾股形之间的变换，此正是中算家所擅长的手段。对他们来讲，此类计算丝毫不存在观念上或技术上的任何障碍。

二、天元术与白道交周算法的构造

《授时历》中的白道交周，是王恂、郭守敬独创的用于计算白道与赤道之差的算法，此算法是如何构建的？《明史历志》中语焉不详。许多年前，薄树人据黄宗羲(1610～1695)的《授时历故》给出其中关键一步数据的求法，同时指出了黄宗羲求解过程的一个错误，并深刻地讨论了这个算法的天文含义。[7]

笔者在研读黄鼎的《天文大成管窥辑要》时，发现这部书记载了有关《授时历》白道交周算法的构造方法，与黄宗羲的方法基本吻合。根据黄鼎记述的文字，可以清楚地看到，《授时历》作者是怎样利用天元术布列一个多项式代数方程的。

天元术是 12 世纪出现的一种布列代数方程的数学方法，这种方法在历法上的应用比较少见。因此，黄鼎记录的《授时历》中白道交周算法的建立过程，就有了一定的数学史的研究价值。黄宗羲大约比黄鼎稍晚，《授时历故》是他研究《授时历》的心得，发表的时间亦在《天文大成管窥辑要》出版之后。因此，讨论一下《天文大成管窥辑要》收录这一算法的构造方法，也是大有必要的。

如图 6-6 所示，我们知道《授时历》白道交周算法的一个主要目的，就是计算天球上的弧段 BE 的长度。根据《明史历志》的记载，《授时历》的作者将图 6-6 中的天球投影到与黄道面及赤道面相垂直的平面上，如图 6-7 所示。①

在图 6-7 中，B 为二分点之投影，AC、DF、圆 B 分别为黄道、赤道及天球之投影。取白道恰好通过二至点的情形，将其展布在平面上，即为以 O 为心之大圆。E 为白道与赤道正交投影，B 为黄道与赤道正交投影。白道交周所求这两个正交相距的"极数"，即通过求解图 6-7 中线段 BE 之长度，再据弧矢割圆法，换算出图 6-6 中天球上的弧段 BE 所对应之弧长。因此问题的关键是如何求线段 BE。据黄鼎记载：

> 其月道与赤道正交距春秋二正黄赤正交东西相去之数难以测识。郭太史以弧中所容直阔之法求之：以白道出入黄道六度便为大圆弧矢，周天半径为弧半弦，自之为半弦实。以矢六度除之，为股弦和。加矢六度为大圆径。
>
> 立天元一为容阔，去减六度，余为截矢。以矢去减大圆径，余以截矢乘之，为容半长幂，寄左。
>
> 又以二至出入半弧弦二十三度七十一分为大勾，除大股五十六度零六分半，得二度三十七分，就整，为度差。置天元一为小勾，以度差乘之，得为小股，又为容半长。自之，得亦为容半长幂。
>
> 与寄左相消得度。以平方开之，得五度七十分为矢容阔，又为小勾。以度差二度三十七分乘之，得一十三度四十七分八十二秒，为容半长。置大弦六十度八十七分半，以小勾五度七十分乘之，以大勾(三)[二]十三度七十一分除之，得一十四度六十三分为小弦，又曰白道与赤道正交距黄赤道(死)[正]交半弧弦。求得半弧背十四

①明史历志(卷 32). 历代天文律历等志汇编(10). 3593~3594。

度六十六分，为白赤道正交距黄赤道正交极数。[8]

按照上述文字，根据图 6-7，先求大圆 O 之直径 MN：因为 $\triangle ABN \backsim \triangle ABM$，所以

$$BM = AB^2/BN$$

按 $BN=6$ 度，表示白道出入黄道数，亦即大圆弧 ANC 之矢。$AB=60.875$ 度，表示周天半径，亦即大圆弧 ANC 之半弦。此处取周天 $=365.25$ 度，$\pi=3$。于是得大圆直径

$$MN = BM + BN = 623.6276\ 度$$

其中，$BM = AO + BO$，就 $\triangle AOB$ 而言，为股 (BO) 弦 (AO) 和。

立天元一为容阔 EJ，即令 $x = EJ$；称 NK 为截矢，$NK = BN - EJ = 6 - x$。因为 $\triangle EKM \backsim \triangle EKN$，所以 $EK^2 = NK \times MK = (BM + x)(BN - x)$，故得容半长幂

$$EK^2 = (617.6276 + x)(6 - x)$$

至此，按天元术求得方程的一半，置左侧。又因为 $\triangle ABL \backsim \triangle EBJ$，所以

$$BJ = EK = EJ \times \frac{BL}{AL} = x \times \frac{BL}{AL}$$

由于 $AD = 23.90$ 为黄赤大距，按弧矢割圆法，很容易求得对应之弦 $AL = 23.71 =$ 大勾，与矢 $DL = 4.81$，因此有 $BL = AB - DL = 56.065 =$ 大股。因此有 $BL/AL = 2.3646$，就整取 2.37 为度差。于是得方程

$$\left(\frac{BL}{AL}\right)^2 \times x^2 = (BM + x)(BN - x) \qquad (6\text{-}23)$$

亦即 $6.6169\,x^2 + 611.6276x - 3705.7656 = 0$

解之，其一正根为 $x = 5.70$ 度。所以

容半长：$EK = x \times BL/AL = 2.3646 \times 5.70 = 13.4782$

小弦：$BE = x \times AB/AL = 14.6346 \approx 14.63$

按沈括会圆术

$$半弧 = 半弦 + 矢^2/直径$$

令半弦 $= BE = 14.6346$,直径 $= 2r = 121.75$,则

$$矢 = r - \sqrt{r^2 - BJ^2} = 1.5108$$

所以,半弧 ≈ 正交极数 $= 14.6346 + 0.0187 = 14.66$。

以上便是《天文大成管窥辑要》所述白道交周求白赤道正交距黄赤道正交的极数 BE 的算法过程。黄宗羲《授时历故》中将以上推导的方程(6-23)误为

$$\left(\frac{BL}{AL}\right)^2 \times x^2 = BM \times (BN - x)$$

由于 x 较之 BM 相对很小,故对方程的结果影响不大,这可能是黄宗羲未能察觉其失误的一个原因。薄树人对黄宗羲算法的修正,则与上述步骤完全吻合。由黄宗羲的错误判断,《天文大成管窥辑要》与《授时历故》可能毫无关系,前者收录的术文,应出自更早的某个版本,而此版本,黄宗羲当时恐怕并未见到。

第五节　正切函数表及其应用

中国古代历法中出现的大量的天文数表,都是所谓的差分表。换句话说,这些表基本上都是通过差分(或者分段差分)的方式构造出来的。大部分差分表的目的都是为了用于构造相应的插值函数(主要是分段插值函数),或类似的数值算法。但是,在一行的《大衍历》(724)中,人们发现了一段简约的文字,原来是用于构造一张类似于正切函数表的方法。

一、《大衍历》的正切函数表

在中国古代数理天文学中,"测影验气"历来是编历者极为重视的任务。每部新的历法都要给出帝都所在处24气的晷影值,并设计相应的算法,计算一年中每一天正午时分的晷影变化。

唐代之前,人们用线性插值的方法,后来又发明了抛物插值或

其他各种复杂的数值逼近算法来计算晷影的长度。在所有这些算法中,天算史家们发现了一张引人注目的天文表,这就是唐代天文学家僧一行(683～727)在其《大衍历》中构造的每度晷影差分表。

一行的晷影表,相当于函数值扩大了8倍的正切函数表,不少研究者认为这是世界上最早的同类函数表。由于三角函数在中国古代传统科学中始终没有建立起来,因此,一行的这个正切函数表的出现,令人多少感到有些惊异,所以引起了中外科学史家的高度重视。

实际上,一行在《大衍历》中设计的正切函数表之构造方法,从观念上来讲,同现代意义下的正切函数表是有些差距的。因此,有些学者不主张将其称为正切函数表。本文为了行文方便起见,将不打算深究这两种称谓的差别。

由于一行在其《大衍历》中记述这个差分表之构造方法的术文极为简约,造成研究者重构此正切函数表时理解上的一些障碍,古克礼(C. Cullen)与刘金沂据《大衍历》原文而构造出的差分表彼此间有很大出入。[9,10]

本节的第一个目的,就是希望根据朝鲜《高丽史》所载唐代《宣明历》(822)中的有关史料,重构一行的正切函数表。并通过对《宣明历》24气晷影长度的推算,一方面验证我们重构之《大衍历》正切函数表的可靠性,另一方面也希望根据这个验算,探讨一下一行的这个差分表在唐代历法编制中的应用,及其对当时天体测量方法的影响。

1. 问题

立8尺圭表测定正午时分太阳的影长,并由此来计算太阳周年视运动变化的一些规律,是中国古代数理天文学通常采用的基本手段。假定z表示太阳的天顶距,对于$h=8$尺长的圭表,设其日影长度为l尺,则有

$$l = h\tan z$$

如果以天顶距 z 每变化一度给出一个相应的晷影值，由此列出一张晷影表，那么，倘若已知太阳的天顶距 z，就可以通过查表而归算出此时太阳的影长。为此，一行用文字的形式，在他的《大衍历》中设计了一种构造每度晷影差分表的方法。

为便于分析一行在其《大衍历》中记述的正切函数表的构造方法，我们分段抄录其原文，[①]并给出相应的注释。如表 6-2，其中左栏数字，是原文内容所对应的天顶距 z。

表 6-2 《大衍历》正切函数表原文及说明

	《大衍历》术文	说明
0	南方戴日之下，正中无晷。	天顶距为 0 度时，影长为 0
1	自戴日之北一度，乃初数千三百七十九。自此起差，每度增一，终于二十五度，计增二十六分。	$z = 1$ 度时，影长 $l = 0.1379$ 尺 初数 1379 是天顶距 $z = 0$ 与 1 度时晷影之差，即，影长之一次差分 Δ 的首项。从 0 到 25 度，影长的三次差分 $\Delta^3 = 1$，即"每度增一"。二次差分 Δ^2 首项为 1，至 25 度累积得 $\Delta^2 = 26$
25	又每度增二，终于四十度。	从 25 到 39 度，$\Delta^3 = 2$
40	又每度增六，终于四十四度。	从 40 到 43 度，$\Delta^3 = 6$
44	增六十八。	在 44 度，令 $\Delta^3 = 68$
45	又每度增二，终于五十度。	从 45 到 49 度，$\Delta^3 = 2$
50	又每度增七，终于五十五度。	从 50 到 54 度，$\Delta^3 = 7$
55	又每度增十九，终于六十度。	从 55 到 59 度，$\Delta^3 = 19$
60	增百六十。	在 60 度，令 $\Delta^3 = 160$

①新唐书历志（卷 28 上）．历代天文律历等志汇编（7）．2238 ~ 2239。

续表

	《大衍历》术文	说明
61	又每度增三十三，终于六十五度。	从 61 到 64 度，$\Delta^3=33$
65	又每度增三十六，终于七十度	从 65 到 69 度，$\Delta^3=36$
70	又每度增三十九，终于七十二度。	从 70 到 71 度，$\Delta^3=39$
72	增二百六十。	当 $z=72$ 度，令 $\Delta^3=260$
73	又度增四百四十。	当 $z=73$ 度，令 $\Delta^3=440$
74	又度增千六十。	当 $z=74$ 度，令 $\Delta^3=1060$
75	又度增千八百六十。	当 $z=75$ 度，令 $\Delta^3=1860$
76	又度增二千八百四十。	当 $z=76$ 度，令 $\Delta^3=2840$
77	又度增四千。	当 $z=77$ 度，令 $\Delta^3=4000$
78	又度增五千三百四十。 各为每度差。因累其差，以递加初数，满百为分，分十为寸，各为每度晷差。又累其晷差，得戴日之北每度晷数。	当 $z=78$ 度，令 $\Delta^3=5340$

通过对《大衍历》术文的说明不难看出，一行构造的每度晷影表是一个分段的高次差分表。这段文字记录在《大衍历》步晷漏章中，因原文过于简约，不同研究者据此重构的正切函数表有相当大的差异，并且当自变量 z 较大时，各种复原方案推算的数值均与理论值的误差很大。

产生理解上之歧异的关键有两点，其一，从术文上看，一行给出的增率 Δ^3 不很规律，总体上呈递增趋势，但在某些段落有回落现象；其二，原文在 44、60 及 72 到 78 度各处的增加值与相邻的增率 Δ^3 相比，显得很突兀，不好理解。

关于第一点，刘金沂对原文进行了改动，目的是使增率 Δ^3 的变化看上去更合理些。这些改动的理由，是基于如下的事实：假定

原文在44度等处给定的增加数是度差Δ^2,则调整后的增率Δ^3,恰好使得差分表在44度与60度处与之巧合;但在61至72度上,无论如何也无法吻合,因此,研究者自己认为,《大衍历》原文在61度以后“必有讹误,但不易校订,且存疑待校”。[10]

关于第二点,古克礼干脆主张,原文叙述无误,只是在44、60及72到78度所给出的增加数,均指的是度差Δ^2,并由此重构了一行的正切函数表。[9]

对于《大衍历》原文的上述两种理解,都无法解决的一个问题就是,如此重构的正切函数表,在60度以前同60度之后相比,与理论值的相对误差均出现急剧增大的现象。说明目前的所有复原方案都存在疑问。

2. 旁证

事实上,研究者们早已认识到目前根据《大衍历》的术文重构的正切函数表,肯定与一行的原表不能完全吻合,但因原文过于简练,又没有新的史料供研究者参考,所以无法进一步考证这个问题。

笔者在翻阅《高丽史》中记录的《宣明历》时发现,该历步晷漏章中也有一个类似的每度晷影差分表的构造方法,过去从未引起过学者们的注意,作为旁证,《宣明历》的构造方法,为重构《大衍历》的正切函数表,提供了重要的考证材料。

《宣明历》是唐代中期徐昂编制的一部历法,这部历法的历算系统与《大衍历》大同小异,因而,《新唐书历志》(卷30上)中对该历的记录很简略。但是,《宣明历》在唐代曾东传日本与朝鲜,并在这两个国家行用了很多年。因此,《高丽史》中十分完整地保存了《宣明历》的术文(表6-3)。[11]

表 6-3　《宣明历》正切函数表原文及说明

	《宣明历》术文①	说明
0	南方戴日之下,正中无晷。	
1	自戴日之北一度,乃初数一千三百七十九。从此起差,每度增一,终于二十五度,增二十六分。	《宣明历》中的"每度加所增"数,即三次差分 Δ^3,与《大衍历》完全相同
26	起二十六度,每度加所增二,终于四十度,增五十(四)[六]分。	当 $z=40$ 度,$\Delta^2=56$
41	起四十一度,每[度]加所增六,终于四十四度,增八十分。	当 $z=44$ 度,$\Delta^2=80$
45	又起四十五度,增一百四十八。	当 $z=45$ 度,$\Delta^2=148$
46	自从每度加所增二,终于五十度,增一百五十八分。	当 $z=50$ 度,$\Delta^2=158$
51	起五十一度,每度加所增七,终于五十五度,增一百九十三分。	当 $z=55$ 度,$\Delta^2=193$
56	起五十六度,每度加所增(九十)[十九],终于六十度,增二百八十八分。	当 $z=60$ 度,$\Delta^2=288$
61	又起六十一度,增四百四十[八]。	当 $z=61$ 度,$\Delta^2=448$
62	自终每度加所增三十三,终于六十五度,增五百八十分。	当 $z=65$ 度,$\Delta^2=580$
66	起于六十六度,每度加所增三十六,终于七十度,增七百六十分。	当 $z=70$ 度,$\Delta^2=760$
71	起七十一度,每度加所增三十九,终于七十二度,增八百三十八分。	当 $z=72$ 度,$\Delta^2=838$
73	又七十三度,增一(百)[千]九十八分。	当 $z=73$ 度,$\Delta^2=1098$
74	七十四度,增一千五百三十八分。	当 $z=74$ 度,$\Delta^2=1538$
75	七十五度,增二千五百九十八分。	当 $z=75$ 度,$\Delta^2=2598$

①高丽史五十(志卷第四历一),43～45;参见文献[11],88～91。

续表

	《宣明历》术文	说明
76	七十六度,增四千四百五十八分。	当 $z=76$ 度,$\Delta^2=4458$
77	七十七度,增七千二百九十八分。	当 $z=77$ 度,$\Delta^2=7298$
78	七十八度,增(五)[一]万(四)[一]千(三)[二]百九十八分。	当 $z=78$ 度,$\Delta^2=11\ 298$
79	七十九度,增一万六千六百三十八分。至于八十度,各为每度差。因累其差,用加初数,满一百为分,分满十为寸,各为每度晷差。又累晷差,各得戴日之北度数。	当 $z=79$ 度,$\Delta^2=16\ 638$ 因影长的二次差分 Δ^2 取到 $z=79$ 度为止,故晷影可推算至 $z=81$ 度的数据

仔细分析《大衍历》与《宣明历》的这两段术文便不难发现,它们构造的是同一个差分表。不过,《宣明历》的术文较之《大衍历》要详尽一些。十分有趣的是,这两段术文都有缺文,但却互为补充。《大衍历》给出了差分表所有三次差的数据,即增率 Δ^3,而《宣明历》则给出了差分表在各个分段处二次差 Δ^2 的数据。《大衍历》中的"每度所增"与《宣明历》中的"每度加所增"同为增率 Δ^3,所处位置与"所终之度"同行。

根据《宣明历》的术文,可以发现,《大衍历》原文中在 44,60 及 72 到 78 度时给出之增加数的意义:其中,第 44,60,72 度因分别增入了 $\Delta^3=68,160,260$ 分,而使相应的增率 $\Delta^3=2,33,440$ 分别起于第 45,61,73 度。《宣明历》中的"增…分",皆是度差 Δ^2,分别与所终之度同行。

据此,应可依术重构一行的正切函数表。

3. 重构

差分表,是中国古代数理天文学中各种天文表经常采用的形式。其布列方法通常是取首行为初日或初度(即 0 度),次行为 1 日或 1 度。初日(度)与 1 日(度)之差,即一阶差分的首项,与初

日(度)并列首行。这是习惯。因此,在重构一行的正切函数表时,我们把各阶差分的首项均并列第一行,余依次排列。

如表6-4所示,第1-5栏是重构的一行正切函数表。第6栏8tanz是影长l所对应的理论值,其中,天顶距z已由中国的“古度”化为现代度值,换算方式为

$$1\ 古度 = (360/365.2565)^\circ$$

其中,365.2565是《大衍历》一个周天(数值上等于其恒星年)的长度。第7栏,绝对误差=影长$l-8\tan z$。第8栏,相对误差=绝对误差/8tanz。

表6-4之相对误差的绝对平均值为0.87%,最小值仅有0.8‰,75度以下,最大相对误差也不超过1.4%,说明这个差分表的稳定性还是相当不错的。前人曾经怀疑《大衍历》的术文有讹误,由上述复原可见,《大衍历》的原文竟只字不差!

我们重构的一行正切函数表与过去的理解还有一点不同,即一行实际上给出了天顶距z从0到81度(不是80度)的晷影值:$l=8\tan z$。

表6-4 重构一行《大衍历》中的正切函数表

z/度	晷影 l/尺	Δ	Δ^2	Δ^3	8tanz	绝对误差	相对误差
0	0	1379	1	1	0	0	0
1	0.1379	1380	2	1	0.1376	0.0003	0.0020
2	0.2759	1382	3	1	0.2753	0.0006	0.0020
3	0.4141	1385	4	1	0.4132	0.0009	0.0021
4	0.5526	1389	5	1	0.5513	0.0013	0.0023
5	0.6915	1394	6	1	0.6898	0.0017	0.0025
6	0.8309	1400	7	1	0.8286	0.0023	0.0027
7	0.9709	1407	8	1	0.9680	0.0029	0.0030

续表

z/度	晷影 l/尺	Δ	Δ^2	Δ^3	8tanz	绝对误差	相对误差
8	1.1116	1415	9	1	1.1079	0.0037	0.0033
9	1.2531	1424	10	1	1.2485	0.0046	0.0037
10	1.3955	1434	11	1	1.3899	0.0056	0.0040
11	1.5389	1445	12	1	1.5321	0.0068	0.0044
12	1.6834	1457	13	1	1.6753	0.0081	0.0048
13	1.8291	1470	14	1	1.8195	0.0096	0.0053
14	1.9761	1484	15	1	1.9648	0.0113	0.0058
15	2.1245	1499	16	1	2.1113	0.0132	0.0062
16	2.2744	1515	17	1	2.2592	0.0152	0.0067
17	2.4259	1532	18	1	2.4085	0.0174	0.0072
18	2.5791	1550	19	1	2.5594	0.0197	0.0077
19	2.7341	1569	20	1	2.7120	0.0221	0.0082
20	2.8910	1589	21	1	2.8663	0.0247	0.0086
21	3.0499	1610	22	1	3.0226	0.0273	0.0090
22	3.2109	1632	23	1	3.1809	0.0300	0.0094
23	3.3741	1655	24	1	3.3414	0.0327	0.0098
24	3.5396	1679	25	1	3.5042	0.0354	0.0101
25	3.7075	1704	26	2	3.6695	0.0380	0.0104
26	3.8779	1730	28	2	3.8374	0.0405	0.0106
27	4.0509	1758	30	2	4.0081	0.0428	0.0107
28	4.2267	1788	32	2	4.1818	0.0449	0.0107
29	4.4055	1820	34	2	4.3586	0.0469	0.0107
30	4.5875	1854	36	2	4.5388	0.0487	0.0107
31	4.7729	1890	38	2	4.7225	0.0504	0.0106
32	4.9619	1928	40	2	4.9100	0.0519	0.0106
33	5.1547	1968	42	2	5.1015	0.0532	0.0104

续表

z/度	晷影 l/尺	Δ	Δ^2	Δ^3	8tanz	绝对误差	相对误差
34	5.3515	2010	44	2	5.2972	0.0543	0.0102
35	5.5525	2054	46	2	5.4975	0.0550	0.0100
36	5.7579	2100	48	2	5.7025	0.0554	0.0097
37	5.9679	2148	50	2	5.9127	0.0552	0.0093
38	6.1827	2198	52	2	6.1282	0.0545	0.0089
39	6.4025	2250	54	2	6.3495	0.0530	0.0083
40	6.6275	2304	56	6	6.5770	0.0505	0.0077
41	6.8579	2360	62	6	6.8109	0.0470	0.0069
42	7.0939	2422	68	6	7.0518	0.0421	0.0060
43	7.3361	2490	74	6	7.3002	0.0359	0.0049
44	7.5851	2564	80	68	7.5564	0.0287	0.0080
45	7.8415	2644	148	2	7.8212	0.0203	0.0026
46	8.1059	2792	150	2	8.0949	0.0110	0.0014
47	8.3851	2942	152	2	8.3784	0.0067	0.0008
48	8.6793	3094	154	2	8.6723	0.0070	0.0008
49	8.9887	3248	156	2	8.9774	0.0113	0.0013
50	9.3135	3404	158	7	9.2944	0.0191	0.0021
51	9.6539	3562	165	7	9.6244	0.0295	0.0031
52	10.0101	3727	172	7	9.9684	0.0417	0.0042
53	10.3828	3899	179	7	10.3274	0.0554	0.0054
54	10.7727	4078	186	7	10.7027	0.0700	0.0065
55	11.1805	4264	193	19	11.0957	0.0848	0.0076
56	11.6069	4457	212	19	11.5080	0.0989	0.0086
57	12.0526	4669	231	19	11.9411	0.1115	0.0093
58	12.5195	4900	250	19	12.3971	0.1224	0.0098
59	13.0095	5150	269	19	12.8780	0.1315	0.0102

续表

z/度	晷影 l/尺	Δ	$Δ^2$	$Δ^3$	8tanz	绝对误差	相对误差
60	13.5245	5419	288	160	13.3864	0.1381	0.0103
61	14.0664	5707	448	33	13.9249	0.1415	0.0102
62	14.6371	6155	481	33	14.4966	0.1405	0.0097
63	15.2526	6636	514	33	15.1051	0.1475	0.0098
64	15.9162	7150	457	33	15.7545	0.1617	0.0103
65	16.6312	7697	580	36	16.4495	0.1817	0.0110
66	17.4009	8277	616	36	17.1954	0.2055	0.0120
67	18.2286	8893	652	36	17.9985	0.2301	0.0128
68	19.1179	9545	688	36	18.8664	0.2515	0.0133
69	20.0724	10 233	724	36	19.8077	0.2647	0.0134
70	21.0957	10 957	760	39	20.8327	0.2630	0.0126
71	22.1914	11 717	799	39	21.9539	0.2375	0.0108
72	23.3631	12 516	838	260	23.1861	0.1770	0.0076
73	24.6147	13 354	1098	440	24.5477	0.0670	0.0027
74	25.9501	14 452	1538	1060	26.0611	−0.1110	−0.0046
75	27.3953	15 990	2598	1860	27.7542	−0.3589	−0.0129
76	28.9943	18 588	4458	2840	29.6622	−0.6679	−0.0225
77	30.8531	23 046	7298	4000	31.8302	−0.9771	−0.0307
78	33.1577	30 344	11 298	5340	34.3169	−1.1592	−0.0338
79	36.1921	41 642	16 638		37.1997	−1.0076	−0.0271
80	40.3563	58 280			40.5840	−0.2277	−0.0056
81	46.1843				44.6154	−1.5689	−0.0352

注：本表的前5栏是根据《大衍历》与《宣明历》有关术文重新构造的"每度正切函数表"，第1栏天顶距 z 的单位为"度"，1"度" = (360/365.2565)°。3～5栏的单位为 10^{-4} 尺。第6栏的 8tanz 是理论值。

另外，由表6-4可知，一行的正切函数表在 $z<75$ 度时，除了

$z=44$或 60 度外，晷影长度 l 被分成了 9 段相连的三次差分表，特别是当 $z\geqslant 73$ 度时，一行构造了一个五次差分表。这是迄今所见中国古代次数最高的差分表(表 6-5)。

表 6-5 《大衍历》正切函数表中的 5 次差分表

z	l	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
73	246 147	13 354	1098	440	620	180
74	259 501	14 452	1538	1060	800	180
75	273 953	15 990	2598	1860	980	180
76	289 943	18 588	4458	2840	1160	180
77	308 531	23 046	7298	4000	1340	
78	331 577	30 344	11 298	5340		
79	361 921	41 642	16 638			
80	403 563	58 280				
81	461 843					

注：晷影 $l=80\,000\tan z$，z 的单位为“度”，一度 $=(360/365.2565)^\circ$。

二、正切函数表的应用与意义

根据《宣明历》的有关史料，我们重构了一行《大衍历》中的正切函数表。《宣明历》沿袭了一行的正切函数表这一事实本身说明，一行的晷影表对唐代的历法产生了一定的影响。

事实上，一行的这张表在唐代数理天文学中的应用还不止这些，徐昂曾利用这个正切函数表，仅仅根据太阳在 24 气的天顶距 z，便直接推算出了《宣明历》的 24 气晷影表。

《宣明历》的 24 气晷影与漏刻表出现在该历的第五章“步晷漏术”中。在晷影表之前，列有阳城的地理纬度(即北极出地高度)$\varphi=34.475$ 度，及其距极度 $=91.30-\varphi=56.825$ 度，其中，91.30 度是《宣明历》所取一个象限的长度。由距极度及黄道去极

度(即太阳距北天极的度数),可以得到太阳的天顶距

$$天顶距 = 黄道去极度 - 56.825(度)$$

《宣明历》晷影与漏刻表共分6栏,与晷影计算直接相关的几栏分别是:①

第1栏,“定气”,由冬至起次第列出24气名;

第2栏,“屈申数”,给出24气太阳天顶距 z 或去极度的一阶差分值 Δ 的100倍;

第3栏,“黄道去极度”,给出了24气时刻太阳的去极度;

第4栏,“阳城日晷”,即24气时刻太阳在阳城的8尺圭表的影长。

原表中的黄道去极度诸数据,度以下的小分均以84为分母,现已按四舍五入换算成两位小数,如表6-6所示。

表6-6　《宣明历》24气晷影及其数源

定气		黄道去极度	天顶距/度	《宣明历》晷影/尺	晷影计算值/尺
冬至		115.20	58.375	12.7033	12.703 25
小寒	大雪	114.55	57.725	12.3911	12.391 102 5
大寒	小雪	112.30	55.475	11.3830	11.383 04
立春	立冬	108.65	51.825	9.9478	9.947 765
雨水	霜降	103.80	46.975	8.3781	8.378 12
惊蛰	寒露	97.95	41.125	6.8874	6.887 4
春分	秋分	91.30	34.475	5.4470	5.446 975
清明	白露	84.65	27.825	4.1959	4.195 935
谷雨	处暑	78.80	21.975	3.2069	3.206 875
立夏	立秋	73.95	17.125	2.4451	2.225 05
小满	大暑	70.30	13.475	1.8989	1.898 925
芒种	小暑	68.05	11.225	1.5714	1.571 412 5
夏至		67.40	10.575	1.4780	1.477 955

①新唐书历志(卷30上). 历代天文律历等志汇编(7). 2332~2334。

表 6-6 中之第 4 栏数据,系采自《宣明历》原表的 24 气阳城晷影。第 5 栏是按第 3 栏相应的天顶距值,根据表 6-4 复原的一行正切函数表计算出来的,其中不满一度的小数部分,按线性插值法计算。例如,对冬至晷影的推算:已知天顶距 $z=58.375$ 度,查表 6-4 中 $z=58$ 那一行,相应的晷影为

$$12.5195+0.375\times0.4900=12.70325 \text{ 尺}$$

比较表 6-6 的第 4、5 两栏,可以发现,《宣明历》所采用的 24 气晷影长度,完全是通过一行的正切函数表计算后按四舍五入原则确定的结果。如果用目前其他学者重构的一行正切函数表进行归算,则当天顶距 $z>45$ 度时,均无法使计算结果与《宣明历》记录的数据相吻合。

由于晷影长度的数据精度在 4 位小数之上,因此,用重构的一行正切函数表计算的结果与历法数据完全相符绝不是巧合,这从一个侧面证实我们据《大衍历》与《宣明历》两段术文重构的正切函数表与一行的原表是相吻合的,同时也反映出一个重要的史实,即一行创制的正切函数表,不仅仅受到了后人的应用,而且在某种程度上,取代了历算家的观测,成为历法推算晷影长度的理论依据。

考察了《宣明历》24 气晷影表的构造之后,很自然的我们会想到,一行是否利用他的正切函数表来构造《大衍历》中的 24 气晷影表呢?从目前的研究来看,似乎还得不出肯定的答案。由表 6-7 可见,有些节气的晷影与一行的正切函数表计算的结果完全吻合,有些则在天顶距取近似值的情况下,与一行表的计算相同,如冬至与立冬等,特别是春秋分的情形,与《旧唐书》中的记载相同。但仍有无解之处。究竟《大衍历》中的晷影表之构造与一行的正切函数表之间有什么关系,是一个应予重视且有待研究的问题。

表 6-7　《大衍历》中的 24 气晷影表分析

定气		《大衍历》天顶距	《大衍历》晷影	实用天顶距	晷影计算值
冬至		58.375	12.7150	58.40	12.7155
小寒	大雪	57.525	12.2277	同《大衍历》	12.297 722 5
大寒	小雪	55.075	11.2182		
立春	立冬	51.225	9.7351		
雨水	霜降	46.375	8.2106	同《大衍历》	8.2106
惊蛰	寒露	40.475	6.7384		
春分	秋分	34.475	5.4319	34.40	5.4319
清明	白露	28.475	4.3211		
谷雨	处暑	22.575	3.3047	同《大衍历》	3.304 74
立夏	立秋	17.725	2.5331	17.70	2.533 14
小满	大暑	13.875	1.9576	同《大衍历》	1.957 725
芒种	小暑	11.425	1.6003	同《大衍历》	1.600 312 5
夏至		10.575	1.4779	同《大衍历》	1.477 955

注:"晷影计算值"是根据"实用天顶距"查一行正切函数表归算出来的结果。

我们已经看到,一行构造的正切函数表在唐代的历法编制过程中得到了一定的应用,那么,这个事实本身说明了什么呢?

按照目前天算史界的一般观念,晷影测量是中国古代天体测量学中最基本的观测方式与内容,原则上说来,每一部传统历法所记录的 24 气晷影长度,都应是当时的历法家实际观测的记录,至少也必须是继承了以前的天算学者的测定成果。

我们通过上述归算而得出的结论与传统的观点显然是不同的:《宣明历》中所采用的 24 气晷影长度,全部是在各节气日黄道去极度或太阳天顶距 z 确定之后,根据一行的正切函数表归算出来的数据。值得注意的是,如果将 24 气以春、秋分和冬、夏至等分为四段,则不难验证,在每一段上,《宣明历》的黄道去极度或太阳天顶距 z 都是一个三次差分表(表 6-8)。这表明《宣明历》24 气晷影表的构造,带有明显的理论色彩。因此,仅就《宣明历》24 气晷影数据的来源而言,从根本上讲,与实际观测是毫无关系的。

表 6-8 《宣明历》24 气黄道去极度是一个 3 次差分表

去极度	Δ	$Δ^2$	$Δ^3$	去极度	Δ	$Δ^2$	$Δ^3$
115.20	0.65	-1.6	-0.2	67.40	-0.65	1.6	0.2
114.55	2.25	-1.4	-0.2	68.05	-2.25	1.4	0.2
112.30	3.65	-1.2	-0.2	70.30	-3.65	1.2	0.2
108.65	4.85	-1.0	-0.2	73.95	-4.85	1.0	0.2
103.80	5.85	-0.8		78.80	-5.85	0.8	
97.95	6.65			84.65	-6.65		
91.30				91.30			

这一结论的意义表明,唐代的天体测量学,在观测理论方面产生了很大飞跃。历算家们已经不再完全基于实测来选择历法中的基本数据,而是有意识地运用一些间接的途径,通过理论的推算,确定历法中的某些数据。因此,一行在《大衍历》中构造的正切函数表在中国古代数理天文学上的价值,应给予更大的重视。

可以期望,通过对一行的正切函数表在唐代以后历法中的应用的进一步发掘与研究,有可能揭开古历中大量天文表的构造之谜,这对于深入理解中国传统天体测量学的理论与成就,显然是很有意义的。

学者们曾经指出,《大衍历》中出现的这个数表是世界上第一张正切函数表(对这一提法的严密性本身是有争议的),并由此对它在科学史上的地位进行了充分的讨论。我们希望补充的是,运用分段的高次差分表来构造如此复杂的正切函数表,从算法思想的角度来看是极为重要的。因为,即使今天的计算数学在处理一些形式未知的函数时,最通常采用的方法也就是分段的差分法。特别值得一提的是,一行在正切函数表的 73 度到 81 度之间构造了一个高达五次的差分表,这是迄今所见中国古代差分表中次数最高的一例。这样复杂的分段差分表究竟是如何构造出来的,无疑是一个非常值得深入探讨的问题。

本节重构了一行的正切函数表,解决了中外学者遗留下来的

一个问题。经过复原后的这个正切函数表给出了天顶距 z 从 0 度到 81 度时每一度的晷影值 l。它的相对误差的绝对平均值达到 8.7‰,并且正切函数表在总体上保持了相当高的稳定性。

我们以《宣明历》的 24 气晷影表的构造为例,说明一行的正切函数表对唐代天体测量学的深刻影响。由于有了这个正切函数表,徐昂在编制《宣明历》时,已经彻底摆脱了对晷影测定的依赖。它表明中国古代的数理天文学家们,已经有意识地运用间接的工具取代直接的观测,导致其治历的手段与观念产生了很大的变化,使得中国传统的数理天文学更具理论化的色彩。这一结果,为我们探索唐代以后历法中一些天文表的构造或数源,开辟了一条新的思路。

第六节　唐代的大地子午线测量

唐代天文学家僧一行在其《大衍历》中为计算晷影长度的变化,构造了世界上最早的一张正切函数表。他还通过对各地晷影的测定,发起并领导了我国历史上第一次地球子午线测量。①

一行领导的天文大地测量,在中国科学史上有着重要的地位。几乎所有重要的唐代通史著作都记录了有关这次测量活动的情况

①一行(683~727),俗名张遂,是中国历史上最有名的科学家之一。通常人们在谈到一行的学术贡献时,除了述及他的最重要的学术著作《大衍历》外,必然要提到的另一项成就就是他所领导的天文大地测量。由于这次测量的结果,事实上相当于归算出了大地子午线 1 度所对应的长度,因此,李约瑟(Joseph Needham)等中外学者对此极为重视,发表了大量的研究论著。但由于中国古代实际上并没有“地球”的概念,所以,也有学者不同意“地球子午线测量”的提法。笔者认为,虽然一行发起了大规模测定各地北极高度的目的不是为了求出地球子午线的长度,而是在于根据实际观测,彻底否定流传上千年的一条古训:地上八尺圭表的日影相差一寸,则天上太阳的距离相隔千里,但从其效果来看,称它是一次地球子午线测量也并不为过,况且此一观点已为较多的科学史家所认可,因此,我们将不刻意区分一行领导的天文大地测量或地球子午线测量这两种说法。

与数据。[12~15]现代中外科学史学者围绕这次测量的研究论著更是不胜枚举。[16~18]这次天文大地测量究竟与一行的正切函数表有无关系？自然是人们感兴趣的一个问题。

本节试图探索一行的正切函数表与史籍上所载唐代天文大地测量数据之间的内在关联。我们的结论是，一行曾依据其正切函数表，归算了当年他领导的地球子午线测量中的许多数据。

一、子午线测量的基本情况

唐代开元十二年(724)四月二十三日，太史监南宫说等人奉命在河南安阳等10个地点布置测影。这些地点均位于东经114°左右，范围介于北纬17°~52°之间。各地将所测夏至等日的晷影长度及其北极出地高度(相当于当地的地理纬度)上报京城，一行通过对这些数据的分析归算得出了"351里又80步极差一度"的结论。[19,20]这个结果不仅彻底否定了世代因袭的所谓"日影一寸，地差千里"的古训，更重要的是，它比较精确地算出了地球子午线一度弧长的数值。因此，受到中外科学史家的高度重视。①

在南北朝时期，人们已经开始怀疑"日影一寸，地差千里"的古训，刘焯就提出通过进行天文大地测量，来判定这条古训的正误，他说：

> 周官夏至日影，尺有五寸。张衡、郑玄、王蕃、陆绩先儒等，皆以为影千里差一寸。言南戴日下万五千里，表影正同，天高乃异。考之算法，必为不可。寸差千里，亦无典说。明为意断，事不可依。今交、爱之州，表北无影，计无万里，南过戴日。是千里一寸，非其实差。

---

①1里≈300步，1步=5尺，按1唐尺≈24.75cm，351里80步=130.41km，由此推得子午线1°的弧长=132.3km，与现代值110.6km，相差21.7km，相对误差约为19.6%。详细的分析，见文献[16~18]。

刘焯还对具体的测量方案，提出了如下建议：

> 请一水工，并解算术士，取河南北平地之所，可量数百里，南北使正。审时以漏，平地以绳，随气至分，同日度影。得其差率，里即可知。则天地无所匿其形，辰象无所逃其数，超前显圣，効象除疑。①

可惜，刘焯的建言当时未被采纳，至大业三年（607）隋炀帝命各郡测影时，刘焯已经去世，事情遂遭搁置。直至唐开元年间，才由一行领导了这次规模庞大的天文大地测量。

全部10个观测地点按地理纬度升序依次为：林邑、安南、朗州、蔡州、许州、告成（阳城）、汴州、滑州、蔚州与铁勒。② 其中蔡、许、汴、滑四州，位于河南境内，在阳城附近。此外的五个地点远离阳城，在河南境外。当时从这些观测点测定与采集的数据有冬、夏至与春、秋分的晷影，当地北极高度，以及河南境内四个观测点之间的距离等。这些测定结果，在许多史籍中都有记录[12~14]。

由于一行此次测量的目的主要是求出极差一度两地间隔的距离是多少，而这个结果通过对河南境内观测点的测量已经归算了出来，因此，其余五地的观测数据便主要被一行用来验证他的归算结果。不难设想，因为路途遥远，观测手段不精等方面的原因，由河南境外返回的数据未必能与一行的归算处处吻合，又由于各节气间的晷影彼此可以互求，有时便难免出现无法自洽的情形，一行究竟是如何来处理这些问题呢？

细读这些数据，我们可以发现书中经常用到“以（勾股）图校之”、“按图斜视”等语，甚至有些在给出了一个地点的春秋分晷影数值后，又附加一个“定春秋分影长”。例如，《旧唐书》记载：

①隋书天文志（卷19）．中华书局编．历代天文律历等志汇编（2）．北京：中华书局，1976．559～560。

②除此10个地点外，各本还录有襄州与太原府两地的“恒春分”晷影，分别为4.8尺与6尺。

> 自此为率，推之比岁朗州测影，夏至长七寸七分，冬至长一丈五寸三分，春秋分四尺三寸七分半。以图测之，定气长四尺四寸七分。按图斜视，北极出地二十九度半，差阳城五度二分。蔚州横野军测影，夏至长二尺二寸九分，冬至长一丈五尺八寸九分，春秋分长六尺四寸四分半，以图测之，定气六尺六寸三分半，按图斜视，北极出地四十度，差阳城五度二分。凡南北之差十度半，其径三千六百八十[八]里九十步。①

上述文字给出了朗州与蔚州的观测数据。“自此为率”是指一行根据观测数据得出的“每351里80步极高差一度”的结果，利用它，通过推求朗州与蔚州的地理纬度之差（南北之差10.5度），可求得两地之间的距离（其径3688里90步）。②

值得注意的是，这段文字在两州的夏至、冬至与春秋分晷影的实测值之后，又“以图测之”给出另一个“定”春秋分晷影值，并且北极出地亦均是“按图斜视”的结果。

实际上，由夏至晷影 s 与冬至晷影 w，通过一行的正切函数表可分别算出各自的天顶距 z_s 与 z_w，于是按

$$\varphi = (z_w + z_s)/2$$

即得当地的地理纬度。由于 φ 就是春秋分太阳的天顶距，查一行表，便得春秋分晷影长度 e。对于朗州，“按图斜视”推得的地理纬度

$$\varphi = (z_w + z_s)/2 = 29.47 \text{ 度}$$

所以，其北极出地的约值应为29.50度。取 $\varphi = 29.47$ 度，查表便得定春秋分晷影

$$e = 4.4055 + 0.47 \times 0.1820 = 4.49 \text{ 尺}$$

①旧唐书天文志（卷35）. 历代天文律历等志汇编（3）. 666～667。

②朗、蔚两州地理纬度相差10.5度，按一行的计算，子午线1度长351里80步，所以两地相距 = 10.5×351里80步 = 3688里90步。各本均误为“3680里90步”。

原文称定气长 4.47 尺，也许是 4.49 尺之误。对于蔚州，"按图斜视"推得的地理纬度

$$\varphi=(z_w+z_s)/2=40.03\text{ 度}$$

于是，其北极出地的约值应为 40 度。取 $\varphi=40.03$ 度，查表便得定春秋分晷影 $e=6.635$ 尺。

通过计算发现，朗、蔚两州的冬、夏至与春、秋分晷影系实测值，一行据其冬、夏至晷影求出当地冬、夏至太阳的天顶距 z_w、z_s，并按

$$\varphi=(z_w+z_s)/2$$

归算出当地的地理纬度，由此推出各自的"定春秋分晷影 e"，以及两地的距离等数据。由于每个观测点都有一个"定春秋分影长"，它们在《旧唐书》中以小号字特别标出，因此，我们推测所有这样的数据皆非采自实测，而是一行归算的结果。

二、定春秋分晷影的归算

根据前面对朗、蔚两州的数据分析，可知一行归算春秋分晷影的步骤大体上是这样的：

设冬至与夏至的晷影分别为 w 与 s，利用一行的正切函数表计算出两至日太阳的天顶距 z_w 与 z_s。由此可以得到观测点的地理纬度，即北极出地，史料中的北极高度有些是实际测定的，有些是由此算出的，但前者与后者通常有些许误差，前者一般不直接用于定春秋分晷影的归算。

实际上，欲知观测点的地理纬度，只需冬、夏至任意一个中气的晷影长度即可，这一点一行是清楚的。例如，在《大衍历》计算不同地方太阳正午晷影的算法中，有

> 凡九服所在，每气初日中晷常数不齐……因测其地二至日晷（测一至可矣，不必兼要冬夏），于其戴日之北每度晷数中，较取长短同者，以为其地戴日北度数及

分。……(其测晷有在表南者,亦据其晷尺寸长短与戴日北每度晷数同者,因取其所直之度,去戴日北度数。)[1]

假设 ε 表示黄赤大距,这样的途径有三条,分别为

$$\varphi_1 = (z_w + z_s)/2$$

$$\varphi_2 = z_w - \varepsilon$$

$$\varphi_3 = z_s + \varepsilon$$

按照以上三种方式之一,我们计算了10个观测地点加上阳城的测定结果,按地理纬度升序排列,次第如表6-9所示。其中最后一栏的数据,系据一行的正切函数表(表6-4)计算出来的结果。计算方法如下:

设已知阳城的地理纬度 $\varphi = 34.4$ 度,查表6-4中 $z = 34$ 那一行,有 $z = 34$ 度时的晷影 $l(34) = 5.3515$,晷差 $= 0.2010$,所以,$z = 34.4$ 度时的晷影

$$e = 5.3515 + 0.4 \times 0.2010 = 5.4319 \text{ 尺}$$

将表6-9中所有的春秋分晷影 e,与其第5栏史料记录的"定春秋分晷影 e"相比较,可以确认,除安南的记录外,所有"定春秋分晷影"数据,都是一行利用他的正切函数表归算出来的结果。

表6-9 利用一行的正切函数表对其天文大地测量之数据的分析

地名	北极出地/度	夏至晷影 s/尺	冬至晷影 w/尺	定春秋分晷影 e/尺	z_s/度	z_w/度	φ/度	春秋分晷影计算值
林邑国	17.4	−0.57	6.9	2.85	−4.12	41.17	19.78	2.856 482
安南都护府	21.6	−0.33	7.94	2.93	−2.39	45.37	20.30	2.938 67
朗州武陵	29.5	0.77	10.53	4.47	5.56	53.37	29.47	4.4910
蔡州上蔡	33.8	1.365	12.38	5.28	9.78	57.70	33.68	5.288 524
许州扶沟	34.3	1.44	12.53	5.37	10.31	58.02	34.12	5.375 62
阳城	34.4	1.478 弱	12.715	5.43			34.40	5.431 9
河南府告成	34.7	1.49	12.71	5.45	10.65	58.38	34.51	5.454 01

[1] 新唐书历志(卷28上). 历代天文律历等志汇编(7). 2240。

续表

地名	北极出地/度	夏至晷影 s/尺	冬至晷影 w/尺	定春秋分晷影 e/尺	z_s/度	z_w/度	φ/度	春秋分晷影计算值
汴州浚仪	34.8	1.53	12.85	5.50	10.93	58.67	34.77	5.506 27
滑州白马	35.3	1.57	13	5.56	11.21	58.98	35.08	5.568 932
蔚州横野军	40	2.29	15.89	6.635	16.10	63.96	40.03	6.634 412
铁勒	52	4.13	29.26	9.87	27.45	76.14	51.35	9.778 57

注：各地的地理纬度 φ 分别按正文中给出的三种公式计算，其中 z_w 与 z_s 分别是根据晷影 w 与 s 利用一行的正切函数表计算出来的冬、夏至太阳天顶距。林邑、蔡州与铁勒之纬度取 φ_3；朗州、告成与蔚州之纬度取 φ_1；许州、汴州与滑州之纬度取 φ_2。除安南外（详见正文），最后一栏春秋分晷影值，是根据表中的 φ 值查一行表计算出来的。本表计算值皆按习惯取不足近似值。

表 6-9 展示了一行对所有观测点之定春秋分晷影的归算，但每一观测点上的各个数据之间还有什么关系呢？有必要逐一讨论。

三、子午线测量数据分析

在前面的讨论中，我们已经分析了朗、蔚两州的数据关系。而河南境内的蔡、许、汴、滑四州的观测数据，如冬夏至晷影、北极高度、各地间距离等，在《唐书》与《唐会要》中均有详细记载。一行主要是根据这四个地点的数据归算出子午线一度所对应的长度数值的。除了蔡州以夏至晷影推算出其“定春秋分晷影”外，其余三地均以冬至晷影归算出各自的“定春秋分晷影”。四地相邻的实测间距虽不等长，但实测北极高度则均相差 0.5 度。其中蔡州北极高度可由其冬至晷影推出，而汴州北极高度则可由其冬、夏至晷影按 $\varphi_1=(z_w+z_s)/2$ 求得。

以下将针对其余各地的数据记录，条析其来源。

1. 阳城有两个北极高度

表 6-9 所列阳城的极高(即纬度)与晷影等数据系采自《旧唐书》。《大衍历》与《新唐书》中相关的数据大体与之相同。但在《新唐书》与《旧唐书》中,紧接着出现的朗州、蔚州、安南、林邑与铁勒的观测数据之记录中,却给出了另一个纬度值:

> 自此为率推之……(朗州)极高二十九度半,差阳城五度三分……(蔚州)极高四十度,差阳城五度[二](三)分……又以图校安南……极高二十度四分……差阳城十四度三分……(林邑)极高十七度四分……若令距阳城而北,至铁勒之地,亦差十七度四分,与林邑正等。①

由以上引文中各地极高与阳城的差度不难判定,此处所用阳城的地理纬度均为 $\varphi = 34.8$ 度。对此,《新唐书天文志》有一条校记称:

> 按《唐会要》卷四二:"河南府告成,北极高三十四度七分,冬至影在表北一丈二尺七寸一分,夏至影在表北一尺四寸九分。"未记及阳城。核算下文所记阳城与武陵、横野军、安南、林邑、铁勒等地极高差、距离和影差时,发现俱系用河南府极高和影长代替阳城极高和影长。

显而易见,告成与阳城的冬、夏至晷影近合,告成的极高 $\varphi = 34.7$ 度,与阳城的第二个极高值亦仅有 0.1 度的差距,因此,虽不能简单地得出此处确以告成数据代替阳城极高的结论,但两者有一定的关联应是不争的事实。

那么,《新唐书》中为什么要这样做呢?通过计算可以发现,由表 6-9 中的北极出地可知

$$[\varphi(\text{朗州}) + \varphi(\text{蔚州})]/2 = (29.5 + 40)/2 = 34.75 \text{ 度}$$

---

①新唐书天文志(卷 31). 历代天文律历等志汇编(3). 715 ~ 716。

此数约与告成纬度 $\varphi=34.7$ 度相同,因此,林邑与铁勒、朗州与蔚州的北极高度的平均值与告成的纬度近同。

如果令阳城的纬度 $\varphi=34.8$ 度,则将造成这四个地方关于阳城对称的结果,而阳城与告成均位于洛阳,这样做似乎有其一定的道理。这可能就是《新唐书》中出现两个阳城北极高度的原因。其中 $\varphi=34.4$ 度应是实测值,另一数据则系随意选择的常数。[①]

2. 林邑有两个夏至晷影

由于林邑国远离中原,因此从该地返回的观测数据有许多不相吻合之处。究竟这些数据的记录是否有误,是过去未能解决的问题。利用一行的函数表,通过判定哪些数据是归算的结果,就可以搞清楚它们之间的关系。据《旧唐书》的记载:

> 宋元嘉中,南征林邑,以五月立表望之,日在表北,影居表南。交州日影觉北三寸,林邑觉九寸一分。
>
> 至林邑国,日在天顶北六度六分强,北极之高十七度四分。
>
> 林邑国,北极高十七度四分,冬至影在表北六尺九寸,定春秋分影在表北二尺八寸五分,夏至影在表南五寸七分。[②]

上述引文给出了两个夏至晷影,其一,是刘宋元嘉年间测定的结果 $s=-0.91$ 尺;其次,是一行最终采用的数据 $s=-0.57$ 尺。

通过试算发现,林邑国定春秋分晷影是由第二个夏至影长确定的:因为 $s=-0.57$ 尺,查表算得夏至日太阳的天顶距 $z_s=-4.12$度,取黄赤大距 $\varepsilon=23.9$ 度,则有地理纬度

$$\varphi_3=\varepsilon+z_s=19.78\text{ 度}$$

由此查表即得其春秋分晷影长 $e=2.856\ 482$ 尺。其冬至日晷影

①为什么要取阳城北极高度为 34.8 度,见下文中有关铁勒的数据分析。

②旧唐书天文志(卷35). 历代天文律历等志汇编(3). 665,667,669。

与北极高度,则可能是由元嘉年间测定的夏至晷影推算出来的:

假定取元嘉年间测定的林邑夏至日晷影 $s = -0.91$ 尺为标准,则查一行的正切函数表可得当时太阳的天顶距 $z_s = -6.565$ 度。若令 $z_s = -6.6$ 度,由此得其冬至日太阳的天顶距

$$z_w = z_s + 2\varepsilon = 41.2 \text{ 度}$$

查表即得冬至日晷影 $w = 6.9051$ 尺 $= 6.90$ 尺。若令 $z_s = -6.5$ 度,即得林邑的北极高度

$$\varphi_3 = \varepsilon + z_s = 17.4 \text{ 度}$$

因此,林邑的测算数据中,只有两次夏至影长为测定数据,其余数据可能均是利用一行的正切函数表推算出来的。虽然这两次夏至晷影测算的结果彼此间有矛盾,但由于按元嘉年间测定的夏至晷影归算的结果,与开元年间测定的夏至日林邑国太阳的天顶距几乎吻合,因此,导致了两组数据:由开元年间测定的夏至晷影,算出定春秋分晷影;由元嘉年间测定的夏至晷影,求得的林邑夏至日太阳天顶距与实测值(六度六分强)近合,据此得到冬至日太阳天顶距,并根据其不足与过剩近似值分别算出冬至晷影及北极高度。

3. 安南的地理纬度计算出现了失误

安南亦即交州,与林邑国类似,安南也远离中原,夏至晷影也在表的南侧。据《旧唐书》记载:

> 宋元嘉中,南征林邑,以五月立表望之,日在表北,影居表南。交州日影觉北三寸。……开元十二年,诏太史交州测影,夏至影表南长三寸三分,与元嘉中所测大同……测影使者大相元太云:"交州望极,才出地二十余度。"
>
> 又以图校安南,日在天顶北二度四分,北极高二十度

> 四分，冬至影长七尺九寸四分，定春秋分影长二尺九寸三分。[1]

由此可知，开元十二年(724)在交州安南只测得夏至日的晷影 $s=-0.33$ 尺。同时测得当地的北极出地高度 $\varphi\approx20$ 余度。“又以图校”所得出的几个数据，则是一行推算的结果：当 $s=-0.33$尺，查一行函数表可算出夏至日太阳的天顶距 $z_s=-2.39$ 度 ≈-2.4 度。取黄赤大距 $\varepsilon=23.9$ 度，则可得冬至日太阳的天顶距

$$z_w=z_s+2\varepsilon=45.4\text{ 度}$$

查表即知，冬至晷影 $w=7.94$ 尺。

有关安南的数据，除夏至晷影外，都是推算的结果。其中定春秋分晷影 e，是在错误地计算了地理纬度 φ 的情况下算出的：

$$\varphi=(z_w+2z_s)/2=20.3\text{ 度}$$

并按此数查表算出春秋分的晷影 $e=2.93$ 尺。实际上 $\varphi=(z_w+z_s)/2=21.5$ 度，此数与《唐会要》所记“北极二十一度六分”近合。而这个错误的结果($\varphi=20.3$ 度)因与当地的实测值($\varphi\approx20$ 余度)相近，或许成为一行有意所为的一个理由。

4. 铁勒的冬、夏至晷影都是实测值

在所有10个观测地点中，纬度最小的是林邑，最大的是铁勒。按《旧唐书》的记载：

> 假令距阳城而北，至铁勒之地，亦十七度四分，合与林邑正等，则五月日在天顶南二十七度四分，北极之高五十二度，周围一百四度，常见不隐。北至之晷四尺一寸三分，南至之晷二丈九尺二寸六分。定春秋分影长九尺八寸七分。[2]

---

①旧唐书天文志(卷35). 历代天文律历等志汇编(3). 665,667。

②旧唐书天文志(卷35). 历代天文律历等志汇编(3). 667。

上述文字表明，一行在处理铁勒的数据时，有意识地将该地与林邑以阳城为中点对称看待。假定铁勒的冬至晷影 $w = 29.26$ 尺为实测值，查一行的正切函数表即得其冬至日太阳天顶距 $z_w = 76.1430$ 度。由此可得铁勒的北极高度 $\varphi = 76.1 - 23.9 = 52.2$ 度。由于林邑的北极高度 $\varphi = 17.4$ 度，故有

$$[\varphi(\text{铁勒}) + \varphi(\text{林邑})]/2 = 34.8\ \text{度} = \varphi(\text{阳城})$$

由此便得出了铁勒与林邑关于阳城对称的结论。注意，此处所取阳城的极高，与表 6-9 及《大衍历》中的数值不同，这也许是《唐书》给出阳城两种极高数据的原因。原文中所言铁勒北极之高 52 度，应是由 φ(铁勒) = 52.2 度约化而来。通过计算发现，这种对称是有一定根据的，一行可能是由铁勒冬至晷影出发，而推导出这个结论的。

铁勒的其他数据，则是由其夏至晷影推导出来的：假定铁勒的夏至晷影 $s = 4.13$ 尺为实测值，查一行的正切函数表即得夏至日太阳的天顶距 $z_s = 27.45$ 度，所以，《旧唐书》称："五月日在天顶南二十七度四分"。由

$$\varphi_3 = \varepsilon + z_s = 51.35\ \text{度}$$

查表即得定春秋分晷影 $e = 9.778\ 57$ 尺。各本均将定春秋分晷影 9.77 尺，误为 9.87 尺。7 与 8 在筹算记数中常有误记。

另外，我们还可以通过下面的计算，证明上述判断。据《旧唐书》(卷 35) 所记：

> (铁勒)以里数推之，已在迴纥之北，又南距洛阳九千八百一十里。

此处以里数推之，即按一行归算的"北极高度差一度，距离 351 里又 80 步"公式推算。按铁勒与阳城纬度之差最大不过 17.8 度，约合近 6250 里，可见《旧唐书》记录的数值太大，肯定有误。

假设 φ(铁勒) = 51.35 度，φ(阳城) = 34.8 度，则两地纬度之差 = 16.55 度。故有两地相距

$$16.55\ \text{度} \times 351\ \text{里}\ 80\ \text{步} = 5813\ \text{里}\ 139\ \text{步}$$

因此,《旧唐书》记录的数值9810里显系5810里之误。这从一个侧面证明了一行通过计算铁勒的夏至晷影导出其另一个纬度值$\varphi = 51.35$度的事实。

简而言之,首先,一行由铁勒的冬至晷影,推导出铁勒的北极高度,并由此得出铁勒与林邑关于阳城对称的结论;其次,一行根据铁勒的夏至晷影,求得其夏至日太阳的天顶距,并据此归算出铁勒的定春秋分晷影,及其距阳城的距离。

由表6-9可见,林邑国夏至日太阳的天顶距$z_s = -4.12$度,铁勒冬至日太阳的天顶距$z_w = 76.14$度,因此,一行在归算他领导的这次天文大地测量活动中,对各种数据的处理范围达到南纬4度至北纬76度。这个事实在一定程度上反映了一行将其正切函数表编成$0 \leqslant z \leqslant 81$度的用心。

根据上面的计算和分析,可以得出这样的结论:目前我们看到的各种史籍上记载的有关唐代天文大地测量的各种数据,有许多并非是实测的结果。比如,文献中所有"定春秋分晷影",就可以肯定是利用一行的正切函数表归算的结果。除了设在河南境内的几个观测点外,其他远离阳城的观测点几乎均未测定春秋分日的晷影。

大体说来,史书上记载的各地有关这次天文大地测量的数据,基本上都是通过冬至与夏至晷影而归算出来的,比如告成、朗州与蔚州;河南境内的几个观测点,虽然测定了冬、夏两至的晷影,但在归算其余数据时,往往只利用其中一至的晷影进行计算。

林邑与安南两地数据,均只有夏至晷影及其北极高度为实测值。为了使归算与实测的北极高度相吻合,林邑国选择了元嘉与开元两次实测的夏至晷影分别计算。

通过计算我们还发现了一个有趣的现象:由于观测地远离京城,观测条件较差等方面的原因,有些地点测定出的冬、夏至两个数据,彼此间在归算时无法吻合。在这种情况下,通常很难进行取舍。于是,一行常常是参考实测的当地北极高度(此数往往不太

精密),利用冬至晷影去归算一个(组)数据,再用夏至晷影去归算另一个(组)数据。这样调和,实际上造成了整体数据间新的矛盾。

一行领导的天文大地测量,在科学史上占有重要的地位。科学史家通常都是利用史料中记录的冬、夏至与春秋分三组数据分析当时的观测结果。本文通过利用一行的正切函数表的归算,基本上搞清了这些数据之间的关系。令人惊异的不仅仅是许多数据(如定春秋分晷影)并非出自实测,而是相对于实测的数据,一行似乎更相信他归算出来的结果! 这一切为正确地分析与评价一行领导的这次地球子午线测量的成就,提供了更客观的标准。

参 考 文 献

[1] 曲安京.《周髀算经》新议. 西安:陕西人民出版社,2002. 42~49

[2] 严敦杰. 中学数学课程中的中算史材料. 北京:人民教育出版社,1958

[3] 钱宝琮. 中国数学史话. 北京:中国青年出版社,1957. 133~134

[4] 陈美东. 中国古代太阳视赤纬计算法. 自然科学史研究,1987,6(3):213~223

[5] 陈美东. 中国古代月亮极黄纬计算法. 自然科学史研究,1988,7(1):16~23

[6] 严敦杰. 宋金元历法中的数学知识. 见:宋元数学史论文集,北京:科学出版社,1966. 210~224

[7] 薄树人. 授时历中的白道交周问题. 见:科学史集刊,第五期,北京:科学出版社,1963. 55~57

[8] [清]黄鼎. 天文大成管窥辑要. 卷首,顺治十年(1653),云林阁刊本;影印再版,台北:老古文化事业公司,1984,卷3,19~20

[9] Christopher Cullen. An Eighth Century Chinese Table of Tangents. Chinese Science,1982,5:1~33

[10] 刘金沂,赵澄秋. 唐代一行编成世界上最早的晷影差分表. 自然科

学史研究,1986,5(4):298~309

[11] [唐]徐昂. 宣明历. 见:俞景老. 韩国科学技术史资料大系·天文学篇(2). 汉城:骊江出版社,1986. 3~125

[12] [宋]欧阳修. 新唐书历志(卷30上). 北京:中华书局,1975. 812~816

[13] [宋]司马光. 资治通鉴(卷212). 北京:中华书局,1957. 6759

[14] [宋]王溥. 唐会要(卷42). 见:丛书集成初编. 北京:中华书局,1985. 755~756

[15] [后晋]刘煦. 旧唐书(卷35). 北京:中华书局,1975. 1303~1308

[16] Joseph Needham. Science and Civilisation in China III. Cambridge:Cambridge University Press, 1954. 292

[17] A Beer, Ho Ping-yu, Lu Gwei-djen, Joseph Needham, E G Pulleyblank and G Thompson. An 8th-Century Meridian Line: I-HSING's China of Gnomons and the Pre-history of the Metric System. Vistas in Astronomy, 1961,4:3~28

[18] 中国科学院陕西天文台. 我国历史上第一次天文大地测量及其意义. 天文学报, 1976,17(2):209~216

[19] 杨志玖. 一行发起测量子午线长度的问题. 科学通报,1956,4:94~95

[20] 梁宗巨. 僧一行发起的子午线实测. 见:科学史集刊(2). 北京:科学出版社,1959. 144~149

第七章　太乙术数中的历法

太乙术数是中国古代命理学的一个门类。太乙,又称太一,先秦时期与五行、堪舆、建除、丛辰、历、天人等并称术数七家。唐代以后,太乙与六壬、奇门遁甲成为术数中并列的三个主要流派,统称"三式",并且逐渐演化完善成为一门体系庞大、内容复杂的官方秘术。自古以来虽识者不多,但影响很大。至今在海内外华人地区与东亚汉字文化圈的国家中仍有流传。据《唐六典十四》记载:

> 太卜令掌卜筮之法,以占邦家动用之事,……凡式,占辨三式之同异。注云:"一曰雷公式;二曰太一式,并禁私家畜;三曰六壬式,士庶通用之。"[1]

作为一门"占邦家动用"之大事的神秘学问,太乙术数历来为统治者所垄断,严禁民间私习,秦九韶在其《数书九章》序言中指出:

> 今数术之书,尚三十余家:天象历度谓之缀术,太乙壬甲谓之三式,皆曰内算,言其秘也。九章所载,即周官九数,系于方圆者,为叀术,皆曰外算。对内而言也。[2]

由此可见太乙术数是一门官方秘术。太乙术数在三式中的地位是十分突出的,例如,《古今图书集成》艺术典术数类的第一个内容就是介绍太乙术数的算法与程式。宋代以后,三式的称呼已经普遍,并与历算、天文并列为当时国子监教学的主要内容之一。

据《算学源流》记载,北宋崇宁年间(1102～1106),三式是国家天文历算机构培养专业人才的必修科目之一,并设置了专门的教官给演习天文历算之学的学子讲授三式等课程:

> 崇宁国子监算学格。官属。博士四员:内二员分讲《九章》、《周髀》,二员分习历算、三式、天文。[3]

太乙历作为中国古代历法的一个分支,以前没有引起学术界

的注意。在中国古代术数学的所有流派中,太乙历是唯一采用与中国古代数理天文学系统相近的历法。作为一门解释过去、推测未来的命理学,太乙术数已有2000多年的历史。它究竟是采用的什么历算方法进行推算的?其历法系统的构造原理是什么?它与普通的官方历法到底有何异同?对这些基本的问题目前似乎均缺乏深入的研究。

探索太乙术数中的历法史,不仅可以为中国古代历法史增补一些没有记载或被误认为已经失传的历法,从而填补历法史的一个空白,更重要的是,它将为我们进一步深入地了解太乙术数的本质提供基本的数据。

按照目前的研究,太乙术数中的历法,大约最先出现在战国至西汉时期,从南北朝开始,太乙历的术数周期有所精简,这种简化为唐代以后的太乙历所继承,并且与当时的普通历法几乎融为一体,按演纪法推算上元积年。

由于基本常数的不断精密,推求太乙历的上元积年成为困难,所以,金代以后,太乙术数仿照南宋《统天历》的做法,在上元设置气差与朔差等,不再推求新的上元积年。这个结果,一直延续到明末。

从目前的研究看来,整个太乙术数的历法史,大约出现了6部历法,依次是:秦汉时期的四分历《甲寅太乙历》(约公元前400),南北朝时期的《宋琨太乙历》(约公元400),唐代王希明的《开元太乙历》(724),宋代的《景祐太乙历》(1034),金代张行简的《太乙历》(1206),元代晓山老人的《太乙统宗宝鉴历》(1303)。元代以后,未见新的太乙历法出现。

第一节　太乙术数的第一部历法

虽然太乙作为术数中的一个重要流派,在各种史籍的书目中都存有许多篇目,仅二十四史中的《艺文志》,在术数类的条目下,就记载了大量的太乙方面的著作,唐代有名的历算家如李淳风、僧

一行等都写过这方面的书,但因历代朝廷均严禁民间私习,因此,阻碍了这些著述的流传。太乙类的书籍在明代以后几乎失传殆尽,《四库全书》中收录的太乙术数的著作,仅有唐代王希明的《太乙金镜式经》。

《太乙金镜式经》中主要记述的是一部唐代开元年间王希明编写的太乙历法。但在这部经过后人增补的书中,还记录了好几个不同的上元积年数。根据对其中一条以甲寅为上元岁名的积年数的研究,我们发掘出了迄今为止可以发现的最早的一部太乙历法。为了与历史上别的甲寅元历或太乙历有所区别,姑将这部新发现的太乙历法称之为《甲寅太乙历》。

虽然"太乙"一词在先秦的典籍中已经出现,但明确记载太乙术数之内容与算法的历史却并不是很早。何丙郁对《南齐书》的研究表明,萧子显(489～537)曾运用太乙术数的方法,推算讨论了汉高祖五年(公元前202)至宋顺帝元年(477)历经679年的国家兴亡大事。这个结果将有文字记载的太乙术数的历史追溯到南北朝时期。[4]

在本节中,我们通过对《甲寅太乙历》之上元积年的重构,搞清了早期太乙术数进行推算时所有重要的基本周期,同时发现了该历与《殷历》的某种特殊关系。并利用这部历法的基本常数与理论值的误差,归算出其制定的年代大约在战国时期,至迟不会晚于汉武帝元朔元年(公元前128),从而将可以考证的太乙术数的确切历史上寻至汉代以前。为探索太乙术数的源流,提供了一个重要的年代数据。

同时,我们试图证明,太乙历法的基本常数系统的构建方式与传统中国古代数理天文学所采用的方法大体相同,但又是官方历法所不能替代的一个历法种类,它是中国历法史上一个几乎湮没无闻的重要分支。

一、最早的太乙历是一种四分历

据王希明《太乙金镜式经》卷5记载：

> 自上元甲寅之岁至大唐开元十二年甲子岁，积得二十八万五千一十一算。[5]

如果我们以 N_n 表示公元 n 年距太乙历法的上元积年，由上述文字可知，唐代开元十二年(724)距《甲寅太乙历》上元积年 N_{724} = 285 011年。

王希明没有给出这个《甲寅太乙历》造于何时、为谁所造、其基本常数有哪些等基本数据。由于四分历是早期中国历法普遍采用的系统，①因此，很有可能为术数家所采用。

当我们假定《甲寅太乙历》是一种四分历，并按《太乙金镜式经》中给定的这个上元积年进行推算时，惊异地发现，其历注气朔时刻与《太初历》及《东汉四分历》的推算居然大体相近(表7-1)。

表7-1　太初元年(公元前104)三历气朔闰推算数据

	太初历(三统历)②	东汉四分历③	甲寅太乙历
制定年代	公元前104年	公元85年	?
N_{-104}	143 127	9177	284 183
上元岁名	丙子	庚辰	甲寅
闰周	19年7闰	19年7闰	19年7闰
回归年	562 120/1539	1461/4	1461/4
朔望月	2392/81	27 759/940	27 759/940
冬至时刻	甲子日夜半	癸亥日75刻	甲子日75刻
闰余	0.00	0.00	0.00
天正11月经朔	甲子日夜半	癸亥日75刻	甲子日75刻

---

①汉太初元年(公元前104)以前的中国古历，都是四分历法。

②东书律历志(卷21下).中华书局编.历代天文律历等志汇编(5).北京:中华书局，1976.1417~1436。

③续汉书律历志(志第3).历代天文律历等志汇编(5).1512~1536。

由于按大历元进行历法推算,基本常数的些微改变,都将造成气朔时刻的巨大差异,因此,若给定一组基本常数,通常只对应着一个上元积年;反之,如果给定一个上元积年,也并非随意一组回归年及朔望月常数便能与之配合。所以,表 7-1 推算的结果,绝不是一种巧合。可以据此推断,《甲寅太乙历》就是一种四分历。按照四分历的回归年与朔望月等基本常数,还可以导出它的如下一些周期:

一章 =19 年 =235 朔望月(共置 7 个闰月,闰余为 0)

一蔀 =4 章 =76 年 =940 朔望月 =27 759 日(日分为 0)

一纪 =20 蔀 =1520 年 =18 800 朔望月 =555 180 日（日名回归上元甲子)

一元 =3 纪 =4560 年 =56 400 朔望月 =1 665 540 日（岁名回归上元甲寅)

4560 年是《甲寅太乙历》参与其上元推算的第一个大周期,经过这个气朔周期,《甲寅太乙历》的历注年、月、日、时将恢复上元初始的状态。该周期与太乙历法的术数内容无关。

由于《甲寅太乙历》的上元积年 N_{724} = 285 011 远大于 4560 年的气朔周期,因此,这个上元积年显然不仅仅是有关气朔推算的结果,理应还有其他因素参与了该历上元的选择。这就是下面所要讨论的《甲寅太乙历》的一些基本术数周期。

二、《甲寅太乙历》的基本术数周期

对于一部太乙历法,除了考虑年、月、日、时四柱八字的干支轮回等与气朔有关的历谱安排之外,更有一些别的因素或周期也要照顾到。根据《太乙金镜式经》卷 5 的算法,在术文“推积年法”给出了《甲寅太乙历》的上元积年之后,接着列出了与此上元有关的三类基本的太乙术数算法,它们依次是:① 推三基太乙法;② 推五福太乙法;③ 推大游太乙法。

“推三基太乙法”,是指太乙术数中的“君基太乙”、“臣基太乙”与

“民基太乙”三个算法。它们的基本周期常数(大周法)均为 360 年。①

第 2 条“推五福太乙法”,用于推算所谓“五福太乙”,其大周期为 225 年。此术的大意是说,五福太乙按八卦中的乾、艮、巽、坤四维,加上地中共计五个行宫,以 45 年移一宫的速度依次绕行,225 年绕行一周。按经文的说法,五福太乙所临之方,无兵革、疾病、饥饿、水旱等灾祸。

五福太乙在早期太乙术数中所占地位比较重要,因此,成为《甲寅太乙历》上元选择时必须考虑的因素之一。该周期在唐代王希明的《开元太乙历》中已经被剔除,宋金元明的太乙术数中也似乎不再考虑这个内容。②

---

①360 是太乙术数中最基本的一个周期。按太乙之法,干支月,不计闰月,每年以 12 月计,5 年一个轮回,60 年回头 12 次。因此,如果上元为甲寅年,并设定其上元所在月为甲寅月,则推上元时,就不必专门列式推算干支月的情况。

干支时的情形是类似的,5 天一个轮回,60 天回头 12 次。如果设定甲子时在甲子日的夜半,则推上元时就不必特别考虑对甲子时的计算,结果自然成立。

干支年、月、日、时的关系如下:

360 年 =72 干支月(称为 72 局) =6 干支年(称为 6 纪)

360 日 =72 干支时(亦为 72 局) =6 干支日(亦为 6 纪)

360 年是所有太乙历法必须考虑的一个周期。

②与《甲寅太乙历》中的五福太乙对应,唐代以后的太乙历法基本上都采用的是如下的“九宫法”:太乙与九宫经常被联系在一起。九宫也是术数中的一个分支,它有两幅对应的基本图式:其一,将八卦布列在四维四方,每卦各居一宫,加上中宫,合计九宫。按中国传统的习惯,上南下北,八卦构成的九宫图如左下图所示。这个九宫图的运行轨迹,与另一幅九宫图有关。这就是易学中有名的“洛书”。洛书是一个三阶的数字方阵,它的每行每列及两个对角线上的三个数字之和,均为 15,因此,宋代的数学家把它叫作纵横图,现代数学称之为幻方(magic square)。以八卦构成的九宫图的行走路线,就是按照洛书中的数字指定的次序进行的,从坎出发,次第入坤、震、巽、乾、兑、艮,最后出离,通常中宫不游。

巽	离	坤
震	中	兑
艮	坎	乾

九宫图

	南	
东	中	西
	北	

四方图

4	9	2
3	5	7
8	1	6

洛书图

第 3 条,推算所谓的"大游太乙"。大游太乙的周期是元法 4320 年。在这个大周期下,有如下的一些关系:

4320 =6×720(纪法)=6×2×360(大周法)=6×6×120(乘行率)
=15×288(太乙小周)=15×8×36(太乙行率)
=20×216(天目周率)=20×12×18(天目行率)

元法 4320 内蕴涵的各种小周期,各有各的讲究与用途。但因其包容的内容似乎太多,对于上元的选择十分不利,所以,唐代以后的太乙历法,将其中大部分小周期的算法都省略了,仅仅保留了其中的纪法 720 年为太乙历法之上元所应该考虑的周期。

实际上,由于"三基太乙"的 360 年周期已经蕴涵在大游太乙的 4320 年周期之中,因此,《甲寅太乙历》上元所要考虑的术数周期,便只有 225 年的五福太乙周期,与 4320 年的大游太乙周期。于是,加上四分历推求年、月、日、时的 4560 年气朔周期,可以知道《甲寅太乙历》的上元积年最大不会超过这些周期的最小公倍数

$$[4560,4320,225]=410\ 400$$

事实上,《甲寅太乙历》上元距开元十二年(724)积年 $N_{724}=285\ 011<410\ 400$ 年。

三、《甲寅太乙历》中的另外两个上元积年

1. 王希明给出的一种近距历元

在《太乙金镜式经》卷 5 的第一段术文中,王希明首先记述了开元十二年(724)距《甲寅太乙历》上元积年数 $N_{724}=285\ 011$,接着给出了如下文字:

> 臣今恐速要,自汉安帝元初甲寅为近,至开元十二年甲子岁积得六百一十一算。

这段话的意思是,为了计算快捷,《甲寅太乙历》可截取汉安帝元初甲寅年(114)为其近距历元,这一年距开元十二年积 611 年。

这样做的理由何在呢？原来，如果我们取纪法 720 与五福太乙的大周 225 的最小公倍数 $[720,225]=3600$ 累减开元十二年距《甲寅太乙历》上元积年 $N_{724}=285\ 011$，则有

$$N_{724}=285\ 011=79\times3600+611$$

因此，以余数 $N_{724}=611$ 代替原来的上元积年，就可以推算五福太乙及大游太乙中以 225 或 720 为周期的所有事项。由此可见，按王希明的观点，《甲寅太乙历》所推算的大部分重要的内容都仅仅与 720 或 225 的周期相关，具体算时，便无需用 $N_{724}=285\ 011$ 这样大的积年运算。这当然是一种简化①。

王希明这样做的理由是，唐代太乙术数中的内容，与《甲寅太乙历》所在时代已经有所不同。早期的一些太乙历法中的某些术数内容，此时已经被淘汰了。这个现象意味着，唐代太乙历法对上元的要求似乎有所放宽。

那么，究竟是什么内容被这以后的太乙历法保留下来了呢？从以下的推算可以看出，至少对于纪法 720 年的周期，各种太乙历法仍然要求遵守：

《宋琨太乙历》上元甲子距开元十二年积年

$$N_{724}=40\ 801\equiv481\pmod{720}$$

《开元太乙历》上元甲子距开元十二年积年

$$N_{724}=1\ 937\ 281\equiv481\pmod{720}$$

《景祐太乙历》上元甲子距开元十二年积年

$$N_{724}=10\ 154\ 641\equiv481\pmod{720}$$

此三历上元岁名皆为甲子，与《甲寅太乙历》不同，这是他们在公元 724 年关于 720 年周期的余数与《甲寅太乙历》不同的原因。但此三历的余数彼此全同，说明他们在推算各自的上元积年

---

①但是，由于 79×3600 不能被章法 19 整除，因此，用 $N_{724}=611$ 代替原来的上元积年就不能够推算气朔时刻，并且大游太乙中不以 720 为周期的项目也均不能依此推算了。

时，都考虑了纪法 720 这个周期。①

2.《甲寅太乙历》的制定年代不会晚于汉武帝元朔元年

《甲寅太乙历》中还经常用到的另一个上元，是开元十二年(724)距上元积年 $N_{724}=13\ 331$。此数与 $N_{724}=285\ 011$ 有何关系？它是如何得来的？原文也没有交代。② 经过推算发现，$N_{724}=13\ 331$ 给出的是一种近距历元。根据《易纬乾凿度》的记载：

> 故阳以七，阴以八为彖易，一阴一阳合而为十五之谓道。阳变七之九，阴变八之六，亦合于十五。……故太一数以行九宫，四正，四维皆合于十五。……六十四卦，三百八十四爻，万一千五百二十析，复从于贞。[6]

这里出现了太一(太乙)与易卦的几个重要的周期：15，64，11 520。它们之间的关系是

$$11\ 520=64\times 15\times 12$$

$$960=64\times 15=240\times 4=80\times 12=60\times 16$$

其中，960 不仅蕴涵了 64 卦与阴阳合数 15，还包含了太乙术数中小游太乙的周期 240，另外，对于四分历而言，日名干支经过 80 年将回复如初，岁名干支每 60 年一个轮回。

若将上元积年 $N_{724}=285\ 011$ 取到汉武帝元朔元年(公元前 128)，则有 $N_{-128}=284\ 159=959+295\times 960$。由于 960 年的周期内，许多太乙术数的推算都会复原，因此，为方便计，截取近距上元积年 $N_{-128}=959$ 就可以取代原来的大的积年数。但因中国的历史远比这个近距历元的积年要长，所以，对此再加上一个大周期

---

①这三部太乙历法的上元积年均见《太乙金镜式经》。

②由于 $N_{724}=13\ 331=120\times 106+611$，其中 120 在前述大游太乙的基本数据中，被称为"乘行率"。而在太乙算中，有专门的一个类别，称为"百六"。不过，按照《太乙金镜式经》卷 7"推太乙有百六之厄法"，术文使用的周期却是 288 年，因此，这个上元积年与 106 究竟有何关系，还不太明确。笔者的推测是，这可能是王希明故意附会的一种说法，与它的真正来源毫无关系。

11 520 年，即得

$$N_{-128}=959+11\ 520=12\ 479$$

由此，马上可以换算出 $N_{724}=13\ 331$，是为这个上元积年的来历。[①]

如果直接由 $N_{724}=285\ 011=851+296\times960$ 来截取近距历元，则得到的结果将是 $N_{724}=851+11\ 520=12\ 371\neq13\ 331$。这个事实表明，《甲寅太乙历》中的这个近距上元积年的推求年代，应该在公元前 128 年之前。这也同时意味着，《甲寅太乙历》的制定年代至少应在公元前 128 年之前。

3. 宋代太乙术数中的甲寅上元

根据前面的讨论，我们看到由《甲寅太乙历》衍生出来的两个甲寅上元积年：

$$N_{724}=611,N_{724}=13\ 331$$

有意思的是，在宋代杨惟德的《景祐太乙福应经》中，仍然可以看到第二个甲寅上元的影子。据其卷 8 之"推太乙阳九之灾"算法称：

> 置演纪上元甲寅至太宗景祐元年甲戌，积四十二万四千四十，上考往古每年减一算，下验将来每年添一算，以阳九大限元数四千五百六十除之，……以算外命之。[②]

由上述文字，可以得到景祐元年(1034)距甲寅上元积年

$$N_{1034}=424\ 041\text{(算尽)}$$

这个上元，包含了 4560 年的周期。另外，在推算"五福太乙"(周期 225 年)、"大游太乙"(周期 4320 年)时，都要用到这个甲寅上元。而这三个周期的最小公倍数为

$$[4560,4320,225]=410\ 400$$

---

①按照这个近距上元积年推算的节气时刻，与《甲寅太乙历》完全一样，但因 960 年不是四分历章岁 19 的整数倍，所以，以此历元推算的经朔时刻将与《甲寅太乙历》不同。

② 见：李零主编. 中国方术概观(式法卷上). 北京：人民中国出版社，1993. 261。

这个数字，我们在前面已经推导过了，它是《甲寅太乙历》的最大周期。如果我们用此数去减 $N_{1034}=424\ 041$，则有

$$N_{1034}=13\ 641+410\ 400$$

将这个上元积年换算成开元十二年(724)距甲寅上元积年，即得

$$N_{724}=13\ 331+410\ 400$$

其中的 $N_{724}=13\ 331$，正是《甲寅太乙历》中衍生的第二个甲寅上元积年。由此可见，《甲寅太乙历》的影响，到宋代仍然存在。

四、太乙历法的功能与《甲寅太乙历》之上元的选择

如所周知，太乙是术数诸多流派中很重要的一个分支，它的中心议题就是研究命理学的，即预测与生命现象有关的一门学问。要预测，就离不开推算。由于预测的内容通常是国家兴亡与人生祸福等重大事件的发生与流变，具有一定的时间跨度，因此，就需要应用历法的推算来确定所预测事件的具体时空。

事实上，我们已经看到，太乙历法是历史上确实出现的一类历法。为什么太乙学者要在官方大历之外重构一套新的历法系统呢？要回答这个问题，首先就必须弄清楚这两种历法的差别。至于太乙历法在中国古代传统社会的应用，无疑是有趣且值得研究的一个问题，何丙郁先生对《南齐书》中有关太乙术数的研究，已经部分地说明了太乙术数在传统社会的应用。限于本节的篇幅与主题，我们在此不拟做进一步深入的讨论。

为了探讨太乙历法与官方历法的区别，从而说明为什么会在太乙术数中搀入一类特别的历法，让我们看一看《甲寅太乙历》上元积年是如何推算出来的。

根据前面的叙述，我们看到，要推求《甲寅太乙历》的上元积年，必须考虑三个大的周期，即作为普通的四分历法所应满足的4560年周期；五福太乙的225年周期；大游太乙的4320年周期。

由于“三基太乙”的360年周期已经蕴涵在大游太乙的周期之中，故不必再特别考虑。

设N_{-104}表示太乙上元距太初元年（公元前104）的积年，令其上元起于甲子日冬至合朔夜半，则必有如下同余式组

$$N_{-104} \equiv 0 (\mathrm{mod} 19) \tag{7-1}$$

$$tN_{-104} \equiv r_1 (\mathrm{mod} 60) \tag{7-2}$$

$$N_{-104} \equiv r_2 (\mathrm{mod} 60) \tag{7-3}$$

其中，$t = 365.25$ 日，是《甲寅太乙历》的回归年长度，19是闰周中的章法。令r_1表示按该历所推汉太初元年（公元前104）的冬至时刻，由于《太初历》当年的冬至在甲子日，因此，要求$0 \leq r_1 < 1$。又令r_2表示太初元年的年名序号，应是个整数，由于上元岁名待定，故假定$0 \leq r_2 < 60$。由式（7-1）可令$N_{-104} = 19n_1$，代入式（7-2），化简得

$$53n_1 \equiv (4/3) r_1 (\mathrm{mod} 80) \tag{7-4}$$

欲令上式有解，必使$(4/3)r_1$为整数，所以，$r_1 = 0$，或者3/4。如果假定$r_1 = 3/4$（关于$r_1 = 0$时的讨论，详见表7-3），则求得$n_1 = 77 + 80n_2$，将它代入式（7-3），即有

$$n_2 \equiv (r_2 - 1463)/20 (\mathrm{mod} 3)$$

此时r_2只有三个选择：$r_2 = 3, 23, 43$。由这三个选择所确定的上元岁名分别为甲戌、甲寅、甲午。当$r_2 = 23$时，得上式的解$n_2 = 3n_3$，即

$$N_{-104} = 1463 + 4560n_3 \tag{7-5}$$

这就是《甲寅太乙历》的上元积年，取$r_2 = 23$的原因是，此时获得的上元积年最小（表7-3）。但这并不是最终结果。因为，按五福太乙，225年太乙绕行五宫一周，故其上元积年N_{-104}必须满足

$$N_{-104} \equiv r_3 (\mathrm{mod} 225)$$

将$N_{-104} = 1463 + 4560n_3$代入上式，得

$$4\ n_3 \equiv (r_3 - 8)/15 + 8 (\mathrm{mod} 15)$$

取 $r_3=8$，解得 $n_3=2+15n_4$，即

$$N_{-104}=10\ 583+68\ 400n_4$$

这还不算结束，因为，按大游太乙，还有一个周期是 4320 年，故 N_{-104}必须满足

$$N_{-104}\equiv r_4(\mathrm{mod}4320)$$

将 $N_{-104}=10\ 583+68\ 400\ n_4$ 代入上式，得

$$5n_4\equiv(r_4-3383)/720+2(\mathrm{mod}6)$$

令 $r_4=3383$，取 n_4 的最小正整数解：$n_4=4$，即得《甲寅太乙历》上元距太初元年（公元前 104）积年为

$$N_{-104}=284\ 183$$

这个结果与《太乙金镜式经》中记载的数据完全吻合。由此可以证明，《甲寅太乙历》的上元积年的选择，不仅考虑了普通历法的气朔周期，而且加入了“三基太乙”、“五福太乙”与“大游太乙”等术数方面的周期。

由于这些术数周期与日常民用的天文年历的推算毫无关系，所以，普通的官方大历对此根本就不予考虑。因此，官方大历不能直接用于太乙术数的推算。也许就是在这样的情形下，太乙学者才按照中国古代数理天文学的基本方法，在官方历法的主流系统之外，发展了一种可称之为“太乙历法”的分支。

五、《甲寅太乙历》的制定年代及其与《殷历》的关系

通常人们将历史上明确记载的最古老的六部历法：《黄帝历》、《颛顼历》、《夏历》、《殷历》、《周历》与《鲁历》合称为古六历。不过，这六部历法均已失传。我们现在可以看到的史料主要是唐代《开元占经》中关于此六历的一些基本数据与上元积年的记录，据此，可以知道它们均为四分历，所有基本常数皆与《东汉四分历》相同。但因古六历的历元各不相同，故编排的历谱就应该有所差别。[7]

古六历中,《殷历》与《周历》的上元均在天正 11 月甲子日朔旦冬至,如《续汉书》记载:

> 夫《甲寅元》天正正月甲子朔旦冬至。[①]

这里的《甲寅元》即指《殷历》。《殷历》造于何时?为谁所造?何时使用?这些问题均无定论。按照通常的习惯,历元应在夜半,但据此编排的历谱,似乎与秦汉的考古发现不能完全吻合,所以人们根据《汉书律历志》的记载:[②]

> 先藉半日,名曰阳历。不藉,名曰阴历。所谓阳历者,先朔月生;阴历者,朔而后月乃生。(邓)平曰:"阳历朔皆先旦月生,以朝诸侯王群臣便。"

认为,《殷历》的上元不一定起于夜半,可能采用了藉半日法。另外,《乾凿度》与《元命苞》分别给出一个甲寅元与庚申元,前者实际上与《殷历》相同,而后者则与《东汉四分历》无异。

我们按天正 11 月甲子朔旦夜半冬至为历元所在,可推算出《殷历》、《周历》与《元命苞》等历法在太初元年的气朔时刻(表 7-2)。

表 7-2　太初元年(公元前 104)《殷历》、《周历》与《元命苞》的气朔时刻

	N_{-104}	上元岁名·日名	冬至	天正 11 月朔
殷历	2 760 263	甲寅·甲子	甲子 75 刻	甲子 75 刻
周历	2 760 320	丁巳·甲子	甲子夜半	甲子夜半
元命苞	2 760 377	庚申·甲子	癸亥 75 刻	癸亥 75 刻

比较表 7-1 与表 7-2,我们看到,《周历》与《元命苞》的气朔时刻在太初元年分别和《太初历》与《东汉四分历》的推算吻合。而更有意思的是,《殷历》上元岁名与其气朔推算,全部与《甲寅太乙历》相同。

那么,这些历法的制定,彼此间有什么关系呢?这是我们感兴

---

①续汉书律历志(志第 2). 历代天文律历等志汇编(5). 1497。因为冬至只能发生在"天正 11 月"或"人正正月",所以,原文有误。

②汉书律历志(卷 21 上). 历代天文律历等志汇编(5). 1401。

趣的问题。要探讨这个问题,最关键的就是要搞清楚这些历法之上元的选择。

《殷历》与《周历》等古六历的上元积年是如何得出的?目前还不太清楚。不过,有一点应该是明确的,对于四分历而言,如果仅仅是为了安排年月日的历谱,则其上元积年数不会超过 4560 年。古六历的上元积年有一个共同的特点,就是它们的近距历元都可以从《开元占经》中给定的上元积年数减去 $605 \times 4560 = 2\ 758\ 800$年而获得。

当我们对《殷历》的上元积年这样分析的时候,发现该历上元距太初元年积年为

$$N_{-104} = 1463 + 605 \times 4560 \tag{7-6}$$

其中,4560 年是四分历年月日的最大周期,经此周期,其上元的年月日时干支都要重新轮回。因此,《殷历》的近距历元应在公元前 1567 年。比较式(7-6)与式(7-5),可以看出,《殷历》的近距历元与《甲寅太乙历》完全相同。

这个结果表明,《殷历》与《甲寅太乙历》的气朔历谱肯定是完全一样的!它们的上元积年的不同,乃是由于这两部历法在推出近距历元 $N_{-104} = 1463$ 之后,出于不同的目的又给其各自的上元加入了与年月日的安排无关的内容。《周历》的上元距太初元年的积年为

$$N_{-104} = 1520 + 605 \times 4560 \tag{7-7}$$

当我们取式(7-4)的 $r_1 = 0$,且当式(7-3)的 $r_2 = 20$ 时,则立即可以推出上元积年

$$N_{-104} = 1520 + 4560 n_3$$

这个结果与式(7-7)表示的近距历元是完全相同的。求解式(7-1)至式(7-3)所构成的同余式组,全部的解应如表 7-3 所示。其中$r_1 = 0$,或 0.75 时,r_2分别有三个不同的选择。那么,历法家是根据什么来确定《殷历》的上元积年呢?

原来，当 $r_1=0.75$ 时，r_2 虽然有三个选择，但结果仅仅是积年数与上元岁名的不同，此时三种上元推算的气朔历谱没有差别！那么，为什么《殷历》要取 $r_2=23$ 呢？这可能是因为，这个上元的近距历元比另外两个要小（表 7-3）。

表 7-3　《殷历》与《周历》上元积年的选择（公元前 104）

r_1	r_2	n_1	n_2	N_{-104}	合朔冬至时刻	上元岁名	备注
0	0	$80n_2$	$0+3n_3$	$0+4560n_3$	甲子日夜半	丁丑	
0	20	$80n_2$	$1+3n_3$	$1520+4560n_3$	甲子日夜半	丁巳	《周历》
0	40	$80n_2$	$2+3n_3$	$3040+4560n_3$	甲子日夜半	丁酉	
0.75	23	$77+80n_2$	$0+3n_3$	$1463+4560n_3$	甲子日 75 刻	甲寅	《殷历》
0.75	43	$77+80n_2$	$1+3n_3$	$2983+4560n_3$	甲子日 75 刻	甲午	
0.75	3	$77+80n_2$	$2+3n_3$	$4503+4560n_3$	甲子日 75 刻	甲戌	

当 $r_1=0$ 时，对应的 r_2 也有三个选择。与《殷历》的情形类似，三种结果仅仅表示其积年数与上元岁名的不同，它们的气朔历谱是没有差别的。那么，为什么《周历》要取 $r_2=20$，而不是 0 呢？这是因为，如果取 $r_2=0$，则导致太初元年（公元前 104）为它的近距历元。由于《周历》的制定显然应该在太初元年之前，因此，这样取近距历元就是没有道理的，所以，不予考虑。比较另外两种情形，当然是取 $r_2=20$ 时所得近距上元更合适些。

通过以上分析，可以看出，按照前面对《甲寅太乙历》上元积年的推算，如果不考虑上元岁名的限制，那么，实际上，以 4560 年为周期的近距历元，便只有两类不同的选择：一类的历谱将与《殷

历》相同,另一类的历谱则同《周历》无异。[①]

尽管《甲寅太乙历》与《殷历》的上元积年数不同,但作为四分历,它们的近距历元是一样的,这一点意味着,这两部历法编排的气朔历谱是没有差别的。

由于王希明在《太乙金镜式经》中仅仅记录了《甲寅太乙历》的上元积年,我们无从查证它的作者与制定年代。那么,这条上元积年是否是王希明根据《殷历》随意编造的一个数据呢?通过计算可以看出,《甲寅太乙历》的上元积年绝不会是出自王希明之手。原因是,按《甲寅太乙历》、《开元太乙历》与《大衍历》分别推算开元十二年(724)的气朔时刻,则后两历几乎相同,但与《甲寅太乙历》相差很多(表7-4)。造成这种推算差距的原因,乃是由于四分历的回归年与朔望月常数都比理论值要大,因此,历久必然出现历法后天的现象。

---

①应该指出的是,古六历庞大的上元积年,可能都是在后人算出了近距历元的基础上,根据某种尚待进一步查明的原因,加入 605×4560 = 2 758 800 年而获得的。关于这个数据,《续汉书(志第2)》(见《历代天文律历等志汇编》(5),1492页)写到:

> 《元命苞》、《乾凿度》皆以为开辟至获麟二百七十六万岁。

"获麟"在哪一年呢?《续汉书》(见《历代天文律历等志汇编》(5),1490页)称:

> 《四分历》仲纪之元,起于孝文皇帝后元三年(公元前161),岁在庚辰。上四十五岁,岁在乙未,则汉兴元年也(公元前206)。又上二百七十五岁,岁在庚申,则孔子获麟(公元前481)。二百七十六万岁,寻之上行,复得庚申。岁岁相承,从下寻上,其执不误。此《四分》历元明文图谶所著也。

由此可知,孔子获麟在鲁哀公十四年(公元前481),此距太初元年(公元前104)377年,所以《元命苞》的上元(开辟之年)距太初元年的积年 N_{-104} = 2 760 377 年。如《续汉书》所言,如果给《东汉四分历》的上元积年也加入"从开辟至孔子获麟的2 760 000年",则它与《元命苞》的上元积年将完全一样,因此说,《东汉四分历》上元的选择与汉代的谶纬之学有着深刻的内在联系。也许是为了使古六历的上元积年与《元命苞》为代表的谶纬学说中的"开辟之年"相配合,也都在各自近距历元的基础上再加入2 760 000 年,但因加入的积年数必须是4560年的倍数,因为 2 760 000/4560 ≈ 605,故取古六历上元距太初元年的积年为

$$N_{-104} = \text{近距历元距公元前104年积年} + 605 \times 4560$$

表7-4 《甲寅太乙历》同《大衍历》的气朔差距

	N_{724}	冬至时刻 公元724年	冬至时刻与 大衍历之差	冬至前后 经朔时刻	经朔时刻与 大衍历之差
甲寅太乙历	285 011	27.75	7.7622	26.1957(前)	3.7082
东汉四分历	10 005	26.25	6.2622	24.6957(前)	2.2082
开元太乙历	1 937 281	19.9237	0.0641	22.5306(后)	0.0431
大衍历	96 961 741	19.9878		22.4875(后)	

注:表中后四栏的数据单位均为"日"。其中,第3栏数据的整数表示冬至日的干支序号,甲子为0,乙丑为1,余依此类推。例如,27.75,表示按《甲寅太乙历》724年冬至时刻在辛卯日75刻。

如果假定历法制定时对气朔时刻的推算与天象基本吻合,我们便可以根据后天的时间差,大致推算出《甲寅太乙历》与《殷历》的制定年代。实际上,虽然我们还不能确切地知道《殷历》的编制年代,但根据对有关历史文献的研究,人们已经可以应用现代天文学赋予的一些方法,将其年代大致地匡定。例如,据《续汉书》记载:①

《甲寅历》于孔子时效,已巳《颛项》秦所施用,汉兴草创,因而不易。……夫《甲寅元》天正正月甲子朔旦冬至,七曜之起,始于牛初。

这里的《甲寅元历》就是《殷历》,上述文字说明,《殷历》大约成立于孔子生活的年代,而孔子获麟在鲁哀公十四年(公元前481)。按照《殷历》所取冬至点的宿度,根据岁差理论的推算,牛初应该是公元前489~前422年之间的实际天象。[8]

据此,我们可以得出这样的结论,《殷历》(《甲寅太乙历》)是根据大约公元前450年前后战国时期的天象而制定的。至于《殷历》与《甲寅太乙历》的关系,不外乎这样两种可能:《甲寅太乙历》是根据已有的《殷历》改编出来的;否则,《殷历》是根据《甲寅太乙历》改编而来的,正如《东汉四分历》根据《元命苞》改编而来一样。

①续汉书律历志(志第2).历代天文律历等志汇编(5). 1497。

不过，从道理上讲，由于术数家对历法编制原理的研究应该不如历法家，所以《甲寅太乙历》出自术数家对《殷历》的一种改编之可能性应该更大些。虽然，我们还不能明确断定《殷历》与《甲寅太乙历》的承传关系，但有一点应该是没有疑问了，那就是，它们之中较早制定的历法的成立年代应在公元前 400 年之前，后来改编的历法的制定年代，至少也应在汉武帝元朔元年（公元前 128）之前（理由参见本节“三”的论述）。

通过上述讨论，我们得出如下结论：

(1)《甲寅太乙历》是目前已知的最早的太乙历法，它是一种四分历，其气朔历谱与《殷历》相同。根据历法中反映的气朔内容所对应的天象推算，它的制定年代应该在战国时期（约公元前 450），至少不晚于汉武帝元朔元年（公元前 128）。

(2)《甲寅太乙历》上元的选择，除了考虑气朔周期外，还包含了“三基太乙”、“五福太乙”与“大游太乙”等三类术数周期。这是太乙历法有别于普通历法的一个重要特征。由于官方大历根本不考虑这些术数周期，因此，历代王朝颁行的历法，基本上都不能直接用于太乙术数的推算。

(3) 从《甲寅太乙历》来看，太乙历法仅仅安排气朔历谱而不考虑日月食与五大行星的推算，因此，在天文年历的意义上，它没有普通历法包涵的内容丰富。

(4) 太乙术数中推算的许多内容，通常都与气朔无关，因此，至少在汉武帝元朔元年（公元前 128）之前，太乙学者已经选择了与推气朔无关的近距历元以代替《甲寅太乙历》庞大的上元积年，以求简化计算。唐代以后的太乙历法，对《甲寅太乙历》中出现的三个大的术数周期也有所删减，仅仅保留了 720 年的纪法周期。

(5) 由于太乙历法的历算常数系统采用的是演纪算法，与中国古代传统数理天文学中之官方大历基本相同，加之，太乙术数本身在中国传统文化史上的重要地位，可以说，太乙历法是中国历法史上长期以来被忽视了的一个重要分支。

第二节　唐代太乙术数中的历法探微

虽然太乙作为术数中的一个重要流派，在历代术数类的书目中都有许多篇目，但因民间百姓不得私习，所以，阻碍了这些著述的流传，明代以后几乎失传殆尽，以至目前可以见到的宋代以前的太乙类著作，只有《四库全书》中收录的唯一一部太乙术数书：唐代王希明的《太乙金镜式经》。

王希明编写的《太乙金镜式经》是一部经过后人增补的现存最古老的太乙术数专著。在本节中，我们将对其中记载的一部比较完整的太乙历法进行初步的整理与讨论，从而试探唐代太乙历法的构造机理，及其与同时代颁行的官方大历的关系。

为方便计，我们称王希明的这部历法为《开元太乙历》。

一、《开元太乙历》的基本内容

1. 历元与基本常数

《开元太乙历》的常数分别在相应的算法之前列出。其中第一条给出的就是该历的上元积年。

中国古代历法中选择的历元，与现代天文学的历元是很不一样的。它通常要求历元被定在一个理想的特定时刻，如甲子年冬至天正 11 月甲子日夜半合朔。这样的历元是需要进行非常复杂的推算才能够求出来的。推算的结果往往是找到一个距离十分遥远的历元，历算家称这样的历元为“演纪上元”，距离上元的年数，就被称为“上元积年”。

推算上元积年是元代《授时历》(1280)以前每一部正规的中国历法必须做的最要紧的大事之一。历法家通常都是在其历法的开篇首先给出它的上元积年。

《太乙金镜式经》卷 1 的第一段文字，就给出了《开元太乙历》上元距开元十二年(724)积年

$$N_{724}=1\ 937\ 281\ 年$$

王希明在给出《开元太乙历》的上元积年 N_{724} 之后，批评了在此之前的《宋琨太乙历》所采用的上元积年 $N_{724}=40\ 801$ 年。声称按《宋琨太乙历》的上元积年计算，则“似童儿戏，推求人纪之年，下求不得日辰，上求不得冬至”。

《宋琨太乙历》已佚，其历算内容均已无考，按王希明的记载，此历之后“三百余年，学者何多，逮于淳风，但效尤而已”，可知它大约出现在公元 400 年前后，应该是南北朝时期的作品。

中国古代历法中的上元，是由回归年 t 与朔望月 u 推导出来的，我们称这两个常数为历法中的基本常数。由于《开元太乙历》采用的是闰周制，因此，它的基本常数还包括了一个闰周p/q，其中 p 称为章月，q 称为章岁。这些常数之间有如下的关系

$$qt=pu$$

中国古代的早期历法，基本上都是采用的闰周制。但因闰周的意义就是为了在回归年与朔望月常数之间人为地寻找一个最小公倍数的关系，这就在一定意义上，限制了历取回归年与朔望月常数的精度。南北朝时期，历法家通过不断地调整闰周，以期兼顾这两个基本常数的精度，但结果是，数据越来越大，十分不利于历法的计算。

所以，唐代初期，人们便开始废除闰周制。傅仁均的《戊寅元历》(618)是中国历法史上最后一部采用闰周制的历法。《开元太乙历》虽然成于唐代开元年间，但仍然采用的是闰周制，这是目前的历法史尚未注意到的一个事实。《开元太乙历》选择的闰周为

$$q=657,\ p=8126$$

这个闰周，曾经为北周董峻的《甲寅元历》(576 年)所采用。[9]《开元太乙历》的两个基本常数分别是

$$回归年\ t=11\ 758\ 322/32\ 193\ 日=365.244\ 680\ 日$$

朔望月 $u=1447/49$ 日 $=29.530\ 612$ 日

2. 推闰

推闰月所在，包括“推太乙月计差法”、“推积月”与“推求闰月”等三条术文。前者给出了《开元太乙历》的闰周：章岁 q 与章月 p，后两条陈述了推闰的方法。

中国古代历法是典型的阴阳合历。因此，如何布置闰月以协调历年与历月的安排，就成为一个很基本的问题。至少从汉代的《太初历》(公元前 104)开始，所有中国古代历法对闰月的安排，都是以无中气为置闰月的标准来推算的。每个历月都有固定的中气与之对应。例如，冬至所在月，一定是天正 11 月。由于相邻的两个中气的间距要大于一个朔望月的长度，因此，必然有一些月份不包含任何一个中气，于是这样的月份，就被命为闰月。推算闰月的方法是，先大致算出闰月所在，然后根据中气，来确定闰月的位置。

因此，推算中气在历月中的位置，亦即中气与所在月的经朔时刻的间距，成为推求闰月所在的关键。这个气朔间距，古人称为“闰余”。推闰月所在的第一步，就是根据“推积月”算法，推求某年天正 11 月的闰余。

设 N_n 表示《开元太乙历》上元距公元 n 年的积年数，M_n 表示上元以来到这一年天正 11 月的积月数，则根据闰周，可以推得当年天正 11 月的闰余 $\alpha_n=pN_n-qM_n$。

按《开元太乙历》的闰周，每 657 年，共置 242 个闰月($p-12q=242$)，合每年产生闰余为 242 分 $=242/657$ 个朔望月。一个普通历年有 12 个历月，每月产生的闰余即是

$$闰差\ \delta=242/12\ 分\approx20.17=20\ 分\ 17\ 秒$$

于是，公元 n 年天正 11 月后第 k 个月的闰余 $\alpha=\alpha_n+k\delta$。当 k 逐渐增加，最终使得闰余 α 大于章岁 q 时，表示闰余的积累已经超过了一个朔望月，此时就要加入一个闰月。

但由于历月的起点通常是在初一的夜半，有一种特殊的情形是，中气发生在初一，但却在合朔时刻之前，此时，虽然在本月的合朔时刻与次月的合朔时刻之间不含任何中气，但历谱上却有一个中气在本月的初一，这样，本月就不能被定为闰月。不过，在这个月之前的历谱上，应该有一个历月不含任何中气，它就是历谱上的闰月。

这样确定闰月的方法，就是术文中所说的“无中气者详之”的意思。

3. 推朔

推经朔时刻，包括“推日计差法”与“推积月并朔法”两条术文。前者给出了《开元太乙历》的朔望月常数 u，后者陈述了推朔的方法。

第一步，先推求公元 n 年天正 11 月的经朔时刻：在前面推闰的过程中，已经求得了开元上元到公元 n 年的积月数为 M_n，于是 uM_n 表示自《开元太乙历》上元以来到公元 n 年天正 11 月经朔时刻的积日数，按干支记日，60 一轮回，以 60 累减 uM_n，不足 60 的整数即为 11 月初一的干支序号，0 为甲子，1 为乙丑，依此类推；小数部分，就表示当月合朔的时刻，从夜半起算。

求天正 11 月后第 k 个月的经朔时刻，只需给本月经朔时刻的大小余加上 k 个朔望月 u 的长度即可，其整数部分若超过 60，以 60 减之，余数表示所求月初一的干支序号，小数部分为其合朔时刻。

《开元太乙历》没有给出推求每月弦望时刻的算法，但说明这个算法与“大历”相同。此处的大历，显然是指官方颁行的普通历法。有意思的是，它特别声明，对太乙术数来说，没有必要推算“弦”与“望”的时刻。这可以看作是太乙历法与官方历法的一个不同点。

4. 推气

推节气时刻，包括“推时计差法”、“推求冬至法”、“推求次气法”与“推求加时法”等四条术文。

“推时计差法”给出了《开元太乙历》中与回归年 t 及时辰有关的几个常数。其中“余数”r 是回归年 t 减去 360 日剩余部分的分数：$r = t - 360$ 日 $= 168\ 842$ 分。“气法”表示一日相应的分数。辰法 = 气法 / 12，表示每个时辰所含有的分数。

第一步，先求某年的冬至时刻：设 N_n 表示《开元太乙历》上元距公元 n 年的积年数，tN_n 表示上元以来到公元 n 年冬至时刻的积日数，按干支记日，60 日一轮回，以 60 累减 tN_n 结果与累减 rN_n 之不足 60 的部分是一样的，为省便计，算法用 rN_n 取代 tN_n。其中，剩余部分中的整数即为当年冬至日的干支序号，0 为甲子，1 为乙丑，依此类推；小数部分，就表示冬至发生的时刻，从夜半起算。

求冬至后第 k 个节气的发生时刻，只需给冬至时刻的大小余加入《开元太乙历》k 个节气的长度即可，整数表示所求气的干支序号（若超过 60，即以 60 累减，取其剩余），小数部分就是所求气发生的时刻。

“加时”的意思，就是将历法推算的不足一日的小数，换算成 12 时辰制来表示。其中子时代表 $23^h \sim 1^h$ 的时间段，因此，欲将以夜半（0^h）为分界点的历法推算数据换算为 12 时辰，首先要给欲换算的小数加上 1/24 日（即半个时辰），然后再以 12 乘之，整数部分从子时数起，0 为子时，1 为丑时，余依此类推。剩余部分再以 3 乘之，0 为孟，1 为仲，2 为季。

5. 推日度

推太阳所在位置，《开元太乙历》给出了两张数表：“推二十四气黄道日度所在立成法”与“推黄道度数立成”。

其中,"推二十四气黄道日度所在立成法"给出了开元十二年(724)《开元太乙历》24气太阳在黄道上的位置。按其冬至所在斗9度,与当年的理论值斗8.7度相差不多。而当时一行的《大衍历》所给出的冬至点在斗10度,与理论值相差较大。但是,由于信息不全,我们无法判断这部历法是否采用了一行之后已无异议的岁差概念。

"推黄道度数立成"给出了《开元太乙历》28宿的距度。由表7-5可知,这部历法所采用的28宿距度体系,基本上是从《大衍历》约化而来的。可以断定,它参考了开元年间一行对恒星的测定结果。

表7-5 《开元太乙历》与《大衍历》等28宿距度的比较

28宿	开元太乙历	麟德历	大衍历	28宿	开元太乙历	麟德历	大衍历
北方	97.25?	96.2448	97.2565	南方	110.5	109	110.5
斗	24	24.2448	23.5	井	30	30	30
牛	7	7	7.5	鬼	3	4(3)	2.75
女	11.5	11	11.25	柳	14	14	14.25
虚	10.25?	10(12)	10.2565	星	7	7	6.75
危	18	16	17.75	张	19	17(16)	18.75
室	17	18	17.25	翼	19	19	19.25
壁	10	10(11)	9.75	轸	18.5	18	18.75
西方	82	83	82.5	东方	75.5	77(79)	75.25
奎	17.5	17	17.5	角	13	13	13
娄	13	13	12.75	亢	9	10(9)	9.5
胃	14.5	15(14)	14.75	氐	16	16	15.75
昴	11	11	11	房	5	5	5
毕	16	16	16.25	心	5	5	4.75
觜	1	2(1)	1	尾	17	18	17
参	9	9	9.25	箕	10.5	10	10.25

注:《麟德历》括号中的数据,系《旧唐书》中的讹误。19.75/77=0.256 493,是为《大衍历》的六虚之差,即其恒星年的余数。

除了这两张表外,《太乙金镜式经》并没有留下《开元太乙历》推算太阳每日行度的算法。但是,如果不计太阳视运动不均匀性

的影响，也忽略岁差的计算，那么，根据24气太阳所在宿度，按太阳每日平行一度，利用28宿距度表，可以很容易地计算出一年中任何一天太阳在黄道上的位置。

与传统中国古代历法相比，《开元太乙历》给出了最基本的计算内容：气、朔、闰的安排，以及太阳视运动的位置。就现在看到的资料，没有发现当时的太乙历法考虑太阳与月亮运动不均匀性的情况。因此，它所推算的历谱，仍然是平气、平朔。另外，太乙历法似乎均不计算日月食与五星运行等项目。这些都是《开元太乙历》与当时行用的官方历法的差别。

二、《开元太乙历》基本常数的选择

《开元太乙历》采用了闰周制来确定它的基本常数，因此，它的回归年与朔望月常数是彼此不独立的。也就是说，在闰周（p/q）确定之后，只要选择了《开元太乙历》的朔望月常数 u，其历取回归年数据 t 将自然确定：$t = up/q$。那么，《开元太乙历》的这几个基本常数是如何选择的呢？

中国古代数理天文学在唐代以前，都是采用的闰周制，早期的历法全部用的是19年7闰制。由于此一闰周置闰稍多，因此，南北朝时期，历算家们开始普遍推求新的闰周，以期提高历取基本常数的精度。人们后来发现，中国古代历算家为取代19年7闰而选取的不同的闰周，全部可以统一在如下的算式之中

$$\frac{p}{q} = \frac{136 + 235k}{11 + 19k}$$

比如当 $k = 34$ 时，就可以得到《开元太乙历》的闰周。在《开元太乙历》的基本常数中，最关键的就是这个闰周。如果我们假定以《大衍历》的回归年 t_d 与朔望月 u_d 为参照值，利用上面的闰周通式来调取新的闰周，会得到什么样的结果呢？令

$$\frac{136+235k}{11+19k}=\frac{t_d}{u_d}=\frac{1\ 110\ 343}{89\ 773}=\xi$$

因为
$$k=\frac{136-11\xi}{19\xi-235}\approx 34$$

所以
$$\frac{p}{q}=\frac{136+235\times 34}{11+19\times 34}=\frac{8126}{657}$$

由此可见，由《大衍历》的回归年与朔望月常数，正好将《开元太乙历》的闰周调出。可以证明，按照这种方式选择的闰周 p/q，一定是《大衍历》回归年与朔望月常数之比值 t/u 的一个渐近分数。[10]在闰周确定之后，王希明令其历取朔望月 $u=29\frac{26}{49}$日，通过闰周，立刻导出其回归年常数

$$t=u\times\frac{p}{q}=365\ \frac{7877}{32\ 193}\text{日}$$

闰周制是唐代以前历法全部遵循的一条治历规则，这个习惯首先被李淳风所打破，自《麟德历》(664)之后，历法家们便不再寻求新的闰周。《开元太乙历》是迄今所见李淳风之后试图恢复传统，采用闰周制的唯一例外。

三、《开元太乙历》上元的选择

中国古代传统历法都要选择一个特殊的时刻作为它的历元，并且通常要求这样的历元发生在甲子年天正 11 月甲子日夜半合朔冬至，这个特殊的时刻被称为上元。

设 N_{724}为开元十二年(724) 距《开元太乙历》上元积年，按照演纪上元的要求，可以列出如下的同余式组

$$N_{724}\equiv 1\ (\mathrm{mod}60) \tag{7-8}$$

$$pN_{724}\equiv\alpha\ (\mathrm{mod}q) \tag{7-9}$$

$$tN_{724}\equiv 19+r_1\ (\mathrm{mod}60) \tag{7-10}$$

其中，$\alpha=\frac{q\Delta}{u}=\frac{32\ 193\Delta}{1447}$，$t=\frac{11\ 758\ 322}{32193}$，$\Delta$、$r_1$ 分别为 724 年闰余与冬至时刻小余。按《大衍历》计算，724 年天正 11 月经朔时刻≈53.00，冬至时刻≈19.95，由此推得闰余 $\Delta\approx27$ 日，从而有

$$\alpha\approx600, r_1\approx30\ 000/\ 32\ 193$$

将 $N_{724}=1+60n_1$ 代入式(7-9)，解得

$$n_1\equiv10\times(\alpha+415)\ /\ 3\ (\bmod 219)$$

因为 $\alpha\approx$ 600，所以最佳选择即为 $\alpha=$ 599，于是

$$n_1=95+219n_2,$$

从而有

$$N_{724}=5701+60\times219n_2$$

将这个结果代入式(7-10)，可以解得

$$n_2=53\times(32\ 193\ r_1-29\ 735)/13\ 140+147n_3。$$

由于 $r_1\approx30\ 000/\ 32\ 193$，所以 r_1 的最佳选择即为 29 735 / 32 193，于是 $n_2=147n_3$，由此可得

$$N_{724}=5701+60\times219\times147n_3$$

如果仅仅考虑气朔的推算，则令上式中的 $n_3=0$，即可得到一个上元积年 $N_{724}=5701$。但此数不是《开元太乙历》的上元积年。这是为什么呢？原来，太乙术数中的历法，除了考虑气朔的历谱之外，更有一些别的因素或周期也要照顾到。

另外，太乙术数中有一个术文叫“推十六神所主法”，这十六神，由十二支与四方组成，依次为：子神、丑神、艮神、寅神、卯神、辰神、巽神、巳神 、午神、未神、坤神、申神、酉神、戌神、乾神、亥神。

如果给 360 年的周期再加入 16 年的周期，则得到所谓的“大游纪法”720 年。事实上，太乙术数在汉代的时候，要考虑的这方面的周期还有很多，但也许是这些因素给太乙上元的选择带来了极大的不便，因此，南北朝之后太乙历法在这一方面的条件便被大大地减弱了，其术数一类的周期，仅仅保留了所谓的“大游纪法”720 年，这就是《开元太乙历》上元必须满足的一个术数周期。

按《宋琨太乙历》上元距公元 724 年积年

$$N_{724}=40\ 801\ 年 \equiv 481\ (\mathrm{mod}\ 720)$$

推算,《开元太乙历》上元距公元 724 年积年 N_{724} 也必须满足

$$N_{724}=5701+60\times 219\times 147n_3\equiv 481(\mathrm{mod}720)$$

求解上式,得 $n_3=1$,亦即《开元太乙历》上元距公元 724 年的积年为

$$N_{724}=5701+60\times 219\times 147=1\ 937\ 281\ 年$$

这正是王希明给出的上元积年。由于《大衍历》上元距公元 724 年积年

$$N_{724}=96\ 961\ 741\equiv 61\ (\mathrm{mod}720)$$

可见它并不满足 720 年这个术数周期。

以上推算表明,太乙历法的上元所包含的内容比普通的官方历法要多一些术数方面的周期,因此,选择一个理想的太乙历法的上元,要比普通历法更复杂。同时也说明,普通的官方历法的上元由于不满足太乙术数的某些周期,因而不能取代太乙历法。这是导致太乙历法出现的一个重要原因。

王希明的《开元太乙历》是目前比较完整地保存至今的最早的一部太乙历法,也是中国古代数理天文学史上最后一部采用闰周制的历法。从这部历法的常数系统与 28 宿度数来看,它与同时代的官方历法《大衍历》(724)是非常接近的。通过对《开元太乙历》之历算内容的条析,可以发现唐代太乙历法的特征,及其与官方大历的差异。

太乙历法选择其常数系统的方法与中国古代数理天文学是一致的,也是以回归年及朔望月为基本常数,运用演纪算法推求其上元积年的。但因太乙历法除了考虑气朔的历谱外,还要满足术数方面的一些特殊要求,所以,对太乙历法上元的推算,要比普通历法上元的选择更复杂一些。这一点也同时导致了不能以官方颁行的"大历"(如当时的《大衍历》)来代替太乙历法的结果,从而使中国古代历法史,在官方大历的主流之外,不得不产生一个太乙历

法的分支。

与官方大历相比,唐代的太乙历法省略了许多天文年历方面的内容,例如,不考虑对日月食与五大行星运行的推算。除了术数方面各种周期的安排外,太乙历法主要是用来推算最基本的气、朔、闰历谱,推算方法与置闰原则均与官方大历相同。

不过,唐代的历法已经开始采用定朔注历,但从《太乙金镜式经》中的记录来看,没有发现《开元太乙历》中有推算月行迟疾的内容,估计它仍然以平朔注历。

四、附录:《开元太乙历》(724)

《开元太乙历》的全文记录在《太乙金镜式经》卷1。由于这部历法以前没有引起过科学史家的注意,因此,我们将卷1中与中国古代传统历法相关的段落摘出,作为本节的附录,名之《开元太乙历》缀于文后。也许是因为年代久远,更可能是由于抄书者不通历法,所以原文的数据出现了大量的错误,已经一一校正。

按内容叙述,《开元太乙历》可分为常数、推闰、推朔、推气与推日度等五个部分。

1. 推上元积年

自上元以来岁代绵远,纪法差殊。虽设繁词,备而靡用。今从上元甲子到唐开元十[二](五)年甲子,岁通前计四万八百一算。臣按宋琨置元,似童儿戏,推求人纪之年,下求不得日辰,上求不得冬至。自三百余年,学者何多,逮于淳风,但效尤而已。

臣今别修甲子元四分历法与太乙同元,举而备用,得上元甲子冬至引而下之,齐距岁计太乙行宫,进不逮于《四分》,退不失于元纪。自上元混沌甲子之岁,至今大唐开元十二年甲子岁积一百九十三万七千二百八十一

算。上考往古每年减一算，下检将来每年加一算。
推太岁所在（略）。
推入六纪三元法（略）。
推太乙所在法（略）。
推天目所在法（略）。
推计神所在法（略）。
推太岁支合神法（略）。
推月计（缺）（略）。
推六纪月建法（略）。

2. 推太乙月计差法

章岁 六百五十七，章月 八千[一]（七）百二十六；闰差 二十，秒[一]（二）十七；周纪法 三百六十；秒法[一]（二）百。

3. 推积月

置积年所求年，以章月乘之，章岁而一，为积月。不尽为闰余。若有余月随数加之。

4. 推求闰月

置闰余，每月加闰差及秒，满法从闰余，满章岁则闰月所在，或六百三十秒者以上，无中气者详之。
推月计太乙所在法（略）。
推天目所在法（略）。
推计神所在法（略）。

5. 推日计差法

日法 四十九，月法 [一]（二）千四百四十七；朔策 二十九，小余 [二]（三）十六；纪法六十。

6. 推积月并朔法

置积月，以月法乘之，日法而一，为积日。不尽为小余。以纪法除积日，不满为月余。命甲子算外，即所求年天正十一月经朔日辰及小余也。若更有余日，随数加之。

求次月，每月加二十九，小余[二](三)十六。各加法求之。弦望算如大历，非此所须也。

……

推日计太乙所在法(略)。
推日计天目所在法(略)。
推日计计神所在法(略)。

7. 推时计差法

[余](全)数 [一](二)十六万[八]千八百四十[二](三)；气法 三万[二](三)千一百九十三；辰法[二](三)千六百八十二，小分 十二分之[九](也)；半辰法 一千三百四十一，小分 十二分之四半。

8. 推求冬至法

置积年减一，以余数乘之[如](为)气法而一，得积日。不尽，为小余，以纪法去积日，不尽为大余，起甲子，算外，即天正冬至日辰也。

9. 推求次气法

置天正冬至大小余，每气加一十五日，余七[千](十)三[十](千)五，[二秒]，秒满二十四从小余一，满气法从大余，满纪法去之。即次气大小余也。

10. 推求加时法

先置半辰法之数:一千三百四十一[及](以)十二小分之四分半,以夏至小余加之,满法而一。所得为辰数,命甲子算外,则气应加时也。不尽,以三乘之,辰法而一,得数命为一辰中孟仲季数也。

推太乙冬夏至入纪(略)。

推冬至太乙时所在变行(略)。

推夏至太乙加时所在变行(略)。

推冬夏二至以后太乙所在法(略)。

推阴阳二遁时计计神法(略)。

推时计太乙变卦法(略)。

推求阳遁太乙直使法(略)。

推求阴遁太乙直使法(略)。

11. 推二十四气黄道日度所在立成法

冬至斗九度;小寒斗二十四;大寒女八;立春危二;雨水室一;惊蛰室[十六](一);

春分奎四;清明娄二;谷雨胃四;立夏昴四;小满毕八;芒种参六;

夏至井[十二](一);小暑井二十七;大暑柳八;立秋张三;处暑翼一;白露翼十六;

秋分轸十三;寒露角九;霜降氐二;立冬房一;小雪尾六;大雪箕三。

12. 推黄道度数立成

北方:斗二十四;牛七;女十一半;虚二十五分半四分度之一;危十八;室十七;壁十;

西方:奎十七半,娄十三,胃十四半,昴十一,毕十

六,觜一,参九;

南方:井三十,鬼三,柳十四,星七,张十九,翼十九,轸十八半;

东方:角十三,亢九,氐十六,房五,心五,尾十七,箕十半。

以下略。

第三节　宋代太乙历法钩沉

近年来随着易学热的影响,术数研究在海内外汉学界已引起越来越多的人们的兴趣。但对术数中蕴涵的某些科学方法与内容似乎还缺乏足够的认识与公正的评价。笔者在一个偶然的机会接触到太乙术数中的一些历算内容,因为发现其中的绝大部分历法从未见诸迄今为止的任何历法史著作,所以,根据对现存唐代以来不多的几部太乙类著作中记述的零星数据的数理分析,追本溯源,企图搞清楚秦汉以降太乙历法的沿革。本节是这个系列研究的一部分,主要目的是复原已经失传的宋代景祐年间出现的一部影响深远的太乙历法:《景祐太乙历》(1034)。

一、《景祐太乙历》:一部失传的宋代太乙历法

唐代王希明的《太乙金镜式经》是目前可以看到的最早的一部太乙类著作。在这部经后人增补的太乙书的第7卷中,记录了一条宋代景祐年间的太乙历法:

推太乙积年法:

置演纪上元甲子岁至今大宋景祐元年甲戌岁得一千一十五万四[千](十)九百五十。若考往古,每年减一,下检将来,每年加一。(文献[5],903)

上述文字给出的上元积年数是从上元甲子岁到景祐元年甲戌

岁(1034),算外。通常历法中记述上元积年时习惯用“算尽”,也就是在此积年数上再加一算。据此,我们知道,这个太乙历的上元距宋景祐元年积年为

$$N_{1034}=10\ 154\ 951\ 年$$

这是我们从《太乙金镜式经》中掌握的有关这部历法的唯一数据。为了行文方便,我们姑且称这个历法为《景祐太乙历》。

明代以前保留至今的太乙类书籍只有两部,除了唐代王希明的《太乙金镜式经》外,另一部是元代晓山老人编辑的《太乙统宗宝鉴》(1303)。这后一部书,在明清两代都有传抄本,并且流传到韩国等东亚地区。笔者在汉城大学见到的是清代嘉庆二十年(1815)钞本,共20卷。其中卷1开篇“求太乙积年术”写到:

> 置演纪上元甲子距大明嘉靖三十一年壬子岁积一千〇一十五万五千四百六十九年。若上考往古,每年减一,下验将来,每年加一。此太乙积年之算也。[11]

据此可知,《太乙统宗宝鉴》的上元距明代嘉靖31年(1552)积年为

$$N_{1552}=10\ 155\ 469\ 年$$

比较《太乙统宗宝鉴》的这条上元积年 N_{1552} 与上述《景祐太乙历》的上元积年 N_{1034},令人惊异地发现,它们竟选择的是同一个上元!

根据传统中国古代历法选择上元的特点,如果两部历法有相同的上元,往往意味着它们有相同的基本常数。换句话说,《太乙统宗宝鉴》的历法,可能就是《景祐太乙历》。

但是,当我们仔细地研究了《太乙统宗宝鉴》的常数与算法之后,却发现其中的历法并未按习惯采取理想的上元,虽然它给出了一个庞大的积年数,但同时也给出了上元时刻的气朔差距,也就是说,《太乙统宗宝鉴》的上元并不是起于天正11月冬至甲子日朔旦夜半。这个做法,不符合唐宋时期演纪积年的要求。

另外,《太乙统宗宝鉴》中采用的基本常数与南宋的《统天历》(1199)及元代的《授时历》(1280)几乎相同,而北宋景祐年间的历

算家是不可能采取这样精度的常数的。

因此,我们推断《景祐太乙历》虽然肯定与《太乙统宗宝鉴》有关,但它绝不是后者所记录的历法。下面的任务就是,如何利用《太乙统宗宝鉴》中残存的一些蛛丝马迹,来复原宋代《景祐太乙历》中的基本常数。

二、《景祐太乙历》的回归年常数

要想复原一部已经失传的历法,仅凭一条上元积年数,当然是很困难的。不过,近年来有关中国传统历法之构造机理的研究,发现这类历法的基本常数围绕其上元积年的推求,都构成了一个常数系统,这为我们依据零星的残历数据而重构失传古历的希望提供了一个理论上可行的保障。这个保障的意思是说,如果知道了一部历法中的上元积年、回归年与朔望月中的两个数据,从理论上讲,第三个数据就应该可以推导出来。我们已经运用这个方法,复原了许多残缺的古代历法(参见本书第二、三章)。

由于已经知道了《景祐太乙历》的上元积年,下一步要做的事情就很明确了,即发现它所采用的回归年或朔望月常数是什么?

传统中国历法的各种常数(尤其是基本常数),通常都采用具有相同分母的分数的形式,这个共同的分母,被称为日法。要使历取常数既简单又有很高的逼近度,是历算家非常重视的大事,其中关键的一步,就是选择一个好的日法。选择日法,不是件简单的事,不是随便什么数都可以胜任的。一个好的日法,常常要满足一些附加的条件,它们都是利用某种实数的有理逼近方法"调"出来的。所以,秦九韶在《数书九章》中记述演纪算法时,特意将"调日法"列为推求上元积年的第一个步骤。

如果假定《景祐太乙历》的日法与《太乙统宗宝鉴》所取10 500相同,那么,取与《景祐太乙历》同时代的《崇天历》(1024)

的回归年常数 $t_c = 365\ \frac{2590}{10\ 590}$ 日为参照值,[①] 则由 $t_c \times 10\ 500 = 3\ 835\ 067.99$,导得一个以 10 500 为日法的回归年常数

$$t = \frac{3\ 835\ 068}{10\ 500}日$$

假定这个回归年数据就是《景祐太乙历》的历取常数,按《景祐太乙历》上元至北宋天圣元年(1023)积年 $N_{1023} = 10\ 154\ 940$,可以由下式推算出 1023 年的冬至时刻

$$t\ N_{1023} \equiv 28.182\ 9\ (\bmod 60)$$

对照表 7-6,可以看出这个结果与《崇天历》所推冬至时刻相差不到0.0250日。由此可以确证

表 7-6　宋天圣元年(1023)《崇天历》气朔时刻

冬至时刻 r_1	闰余 r_2	11 月经朔 $r_1 - r_2$
28.158 6	$0.051\ 639u = 1.524\ 9$	26.633 7

$$t = \frac{3\ 835\ 068}{10\ 500} = 360 + \frac{55\ 068}{10\ 500}日$$

应是《景祐太乙历》的回归年常数无疑。其中的 55 068 与《太乙统宗宝鉴》基本常数表中误记的岁余完全相同,这也算是《景祐太乙历》保存在《太乙统宗宝鉴》中之遗迹的一个证据。

三、《景祐太乙历》的朔望月常数

截至目前,我们已经掌握了《景祐太乙历》的上元积年与回归年常数。按照我们重构的中国古代天文常数系统的理论,应该可以推导出《景祐太乙历》的朔望月常数。

---

①宋史律历志(卷 71). 中华书局编. 历代天文律历等志汇编(8). 北京:中华书局, 1976,2568。

南北朝以后的中国历法所取朔望月常数大体在 29.530 595 ± 0.000 005 日之间。因此,我们无妨假定《景祐太乙历》朔望月的参照值为 $u_0 = 29.530\ 59 = \frac{310\ 071.195}{10\ 500}$日,并设

$$f(u) = \frac{(t - 12u)N_{1023}}{u}$$

如果令 u 表示正在推导的《景祐太乙历》的朔望月常数,那么,$f(u)$ 的小数部分表示《景祐太乙历》在 1023 年推算的闰余。由于《景祐太乙历》与《崇天历》制定的年代相近,因此,1023 年两历推算的闰余亦应相近,所以,我们推导的《景祐太乙历》的朔望月常数 u,应使 $f(u)$ 的小数部分与表 7-6 中《崇天历》的相应值 0.05相近。令 $u = u_0 + n\delta$,其中,n 为调整的次数,δ 表示调整的步长,取 $\delta = 0.005/10\ 500$ 日。则

$$f(u) - f(u_0) = \frac{-n\delta t N_{1023}}{uu_0} \approx \frac{-n\delta t N_{1023}}{u_0^2} = -2.025\ 338\ 363n$$

因为$f(u_0) = 3\ 740\ 537.280\ 415$, 所以

$$f(u) \equiv 0.280\ 415 - 0.025\ 338\ 363\ n \pmod 1$$

当 $n = 9$ 时,有

$$f(u) \equiv 0.052\ 370 \pmod 1$$

此时得到的朔望月常数为 $u = 310\ 071.24/10\ 500$ 日。据此推算的 1023 年的气朔时刻如表 7-7 所示,其中,所推天正 11 月经朔时刻与《崇天历》的结果(表 7-6)相差仅 0.0026 日,可称密合。

表 7-7　宋天圣元年(1023)《景祐太乙历》气朔时刻

冬至时刻 r_1	闰余 r_2	11 月经朔 $r_1 - r_2$
28.182 9	$0.052\ 373u = 1.546\ 6$	26.636 3

比较表 7-6 与表 7-7《崇天历》与《景祐太乙历》所推天圣元年气朔时刻,可以确认,以上关于《景祐太乙历》基本常数的推导,是可靠的。

按照《太乙统宗宝鉴》的内容,《景祐太乙历》至少还应有自己的近点月常数,但其值究竟如何,因按上述方法推导,可能值不是唯一的,是故暂付阙如。表 7-8 给出了这两历的基本数据对照表。

表 7-8 《崇天历》与《景祐太乙历》的基本常数

	上元积年 N_{1023}	回归年 t	朔望月 u
崇天历	97 556 340	3 867 940/10 590 = 365.244 570	312 729/10 590 = 29.530 594 90
景祐太乙历	10 154 940	3 835 068/10 500 = 365.244 571	310 071.24/10 500 = 29.530 594 29

四、太乙历法与官方历法之异同

从史料记载来看,太乙术数从一开始就采用了与当时行用的历法几乎相同的历算系统,至少从宋代的文献中可以了解到,当时的太乙术数就是司天监的一个部门。[3] 按道理来说,太乙历法似乎直接采用当时行用的历法即可,没有必要在官方颁布的历法之外,再搞一套新的历算系统。但事实上,在官方历法的主流之外,的确出现了一个太乙历法的旁支,这是为什么呢?

要探讨太乙历法与官方历法的差异,就需要了解其上元积年的异同。这两类历法的上元虽然都号称为演纪上元,但相似却不全同。例如,720 是太乙术数中的一个很重要的周期,以《太乙金镜式经》记载的几部采用甲子元的太乙历法为例,它们的上元距大宋天圣元年(1023)积年用 720 年的周期推算,其余数全部相同。

《宋琨太乙历》上元距天圣元年积年

$$N_{1023} = 41\ 100 \equiv 60 \pmod{720}$$

《开元太乙历》上元距天圣元年积年

$$N_{1023} = 1\ 937\ 580 \equiv 60 \pmod{720}$$

《景祐太乙历》上元距天圣元年积年

$$N_{1023}=10\ 154\ 940\equiv 60\ (\mathrm{mod}720)$$

可见这些太乙历法均遵循纪法720年的周期。但对照与《开元太乙历》及《景祐太乙历》同时代的《大衍历》(724)与《崇天历》(1024),由于

《大衍历》上元距天圣元年积年

$$N_{1023}=96\ 962\ 040\equiv 360\ (\mathrm{mod}\ 720)$$

《崇天历》上元距天圣元年积年

$$N_{1023}=97\ 556\ 340\equiv 660\ (\mathrm{mod}\ 720)$$

显而易见,它们都不满足太乙术数的这个要求。因此,是不能为太乙术数所应用的。

所以,太乙历法的上元除了蕴涵官历上元推算气朔的内容之外,还包涵了太乙术数本身的一些周期,这些是官历所不具备的。这恐怕就是太乙学家要重新制定自己的历法的主要原因。

五、宋代以后的太乙历法为什么采用相同的演纪上元

从目前的研究看,太乙术数中的历法自唐代开元十二年(724)后,一直使用的是王希明的《开元太乙历》,直到宋代才被《景祐太乙历》(1034)所取代。《景祐太乙历》并非太乙术数的最后一部历法,不过,此后太乙历法的常数与内容虽屡有更迭,但各历的演纪上元积年始终没再改变。

为什么《景祐太乙历》以后的太乙历法即使在改变常数系统的情形下,也始终沿用它的演纪上元呢?这就必须对太乙历法之演纪上元的选择进行具体的数理分析。

唐代以后,太乙历法的上元积年也是采用演纪算法推求的,但因加入了术数方面的一些周期,推算起来较之传统历法之演纪上元的选择应该更加复杂。由前面的讨论已经看出,《崇天历》之所以不能代替《景祐太乙历》,是因为前者的上元积年不满足太乙术数的一些要求。因此,导致太乙学家利用演纪算法重新构造一个

上元。

假定 N_{1023} 表示《景祐太乙历》上元距宋代天圣元年(1023)积年,按太乙术数的要求,它应满足式(7-11)。如果令 r_1 表示《景祐太乙历》在天圣元年的历注冬至时刻,r_2 为当年的闰余(即天正11经朔时刻距冬至时刻的时间),则 N_{1023} 应满足如下同余式组

$$N_{1023} \equiv 60 \pmod{720} \tag{7-11}$$

$$tN_{1023} \equiv r_1 \pmod{60} \tag{7-12}$$

$$tN_{1023} \equiv r_2 \pmod{u} \tag{7-13}$$

其中,t 与 u 分别表示《景祐太乙历》的回归年与朔望月常数,见表7-8。由式(7-11),可令

$$N_{1023} = 60 + 720\ n_1$$

将其代入式(7-12),化简可得

$$818n_1 \equiv 661\ +\ 175r_1/12 \pmod{875}$$

欲令上式有解,必使 $12 \mid 175r_1$,由表7-6可知,《崇天历》在1023年的历注冬至时刻为28.16日,令 $r_1 \approx 28.16$,则有 $175r_1/12 = 411$,于是 $r_1 = 28\dfrac{1920}{10\ 500} = 28.182\ 9$。求解上面的同余式,即得

$$n_1 = 104 + 875n_2, N_{1023} = 74\ 940 + 630\ 000n_2$$

将这个结果代入式(7-13),化简可得

$$59\ 129n_2 \equiv 69\ 718 + (6 +\ 87\ 500r_2)/9 \pmod{287\ 103} \tag{7-14}$$

欲令上式有解,必使 $9 \mid (6\ +\ 87\ 500r_2)$。如果令《景祐太乙历》与《崇天历》的经朔时刻之差小于0.005日,即

$$26.6287\ <\ r_1 - r_2 < 26.6387$$

则由于已知 $r_1 = 28.182\ 9$,得 $15\ 013.3 < (6 + 87\ 500r_2)/9 < 15\ 110.5$,令

$$(6 + 87\ 500r_2)\ /\ 9 = 15\ 062 + s, |s| < 49$$

则求解同余式(7-14),得

$$n_2 \equiv 47\ 508 + 128\ 225\ s \pmod{287\ 103} \tag{7-15}$$

式(7-15)共有97个解。由于对于演纪积年来说,通常要求上元积

年数小于一亿年，即

$$N_{1023}=74\ 940+630\ 000n_2<10^8$$

因此，在式(7-15)的解集合中，只有使 $n_2<159$ 的解才算合用。依概率而论，大约在式(7-15)中每1800个不同余的解中，只能遇到一个小于159的 n_2。所以，对于《景祐太乙历》而言，按照上面的推算，在式(7-15)中的97个解中，获得一个合用的演纪上元(即满足 $n_2<159$)的概率大约仅有5%。

但是，巧得很，经过计算发现，《景祐太乙历》竟然在式(7-15)中的97个选择中，就得到了一个合用的解：$s=-25$ 时，$n_2=16$，闰余 $r_2=16\ 239.24/10\ 500=1.546\ 6$ 日。此时所得上元积年为

$$N_{1023}=74\ 940+630\ 000n_2=10\ 154\ 940$$

与记载吻合。

由此可见，按演纪算法，一部太乙历法要推算出一个理想的上元，通常是很不容易的。《景祐太乙历》能够在5%的可能性中选到合用的上元，已经是很幸运的了。不难想像，这样的情况并不是所有的太乙学者都可以轻易遇到的，因此，在反复相求而不得其解的情形下，唯一可行的方案，就是沿袭《景祐太乙历》的上元积年，别无选择！

六、《景祐太乙历》的作者与制定年代

迄今为止，我们依据《太乙金镜式经》中的一条上元积年数据，与《太乙统宗宝鉴》中相关内容的提示，重构了一个几乎完全失传的太乙历法《景祐太乙历》。通过以上复原的推算过程，可以看出《景祐太乙历》与《崇天历》(1024)的常数及气朔时刻均极为相近，由此可以确断，两历的制定年代理当相去不远。又根据《太乙金镜式经》中记录的《景祐太乙历》上元积年截至"大宋景祐元年(1034)"，我们有理由把该历的制定时间定在1034年。

关于《景祐太乙历》的作者，我们还没有发现任何直接的证

据。但据《通志(艺文6)》记载,[12]术数类书目在宋代景祐年间有许多与三式有关,其作者几乎是同一人:杨惟德(杨维德)。计有:

(1) 景祐太一福应集要,10卷,宋杨惟德撰;

(2) 景祐六壬神定经,10卷,宋杨惟德撰,见《丛书集成》0709册;

(3) 景祐三式目录,1卷,宋杨惟德撰;

(4) 万年历,17卷。

在《宋史艺文志》卷159也有杨惟德的书目:[13]

(1) 杨惟德乾象新书,30卷;

(2) 杨惟德王立太一福应集要,1卷;

(3) 杨惟德景祐遁甲符应经,3卷。

其中《景祐六壬神定经》有两卷明代的残抄本在同治四年(1865)发现,后被收入《丛书集成初编》。①

杨惟德本人经历不详,正史中未见有传记流传。但在《宋史列传》(卷220)"方技"中的"韩显符传"中,提到了杨的名字:

> 大中祥符三年,诏显符择监官或子孙可以授浑仪者……又主簿杜贻范、保章正杨惟德皆可传其学(文献[13],三九,13503)。

保章正一职在唐代初期是司天监的历博士,宋代的保章正级别为正七品,是负责历法的一位官员。[14]由此可见,杨惟德一定是位从事历法编算的学者。

另据《宋史》记载,韩显符"专浑天之学",宋至道元年(995)制成浑仪一座。韩显符后来在其所作10卷本的"法要"序文中,称"自伏羲甲寅至皇朝大中祥符三年(1010)庚戌岁积三千八百九十七年。"由此可知,韩显符制定的历法上元起于甲寅年,距1010年积年为$N_{1010}=3897$年。这个上元积年是如何得出的呢?它与太

---

①在李零主编的《中国方术概观》(式法卷)中,收录了杨惟德的《景祐太乙福应经》与《景祐遁甲符应经》。

乙术数有无关系呢？

从王希明的《太乙金镜式经》中我们知道，最早的太乙历法《甲寅太乙历》的上元也是起于甲寅年，该上元距宋大中祥符三年(1010)积年为

$$N_{1010}=285\ 297\equiv 57\ (\mathrm{mod}60)$$

而韩显符历法的上元距1010年的积年为

$$N_{1010}=3897=57+64\times 60$$

其中，60为干支轮回周期，64是八卦周期。这两个数的乘积显然是与术数有关系的。也就是说，韩显符历法的上元积年很可能是在假定起于甲寅年的前提下，直接按术数的周期，给余数57年加入3840年而获得的。若果真如此，则韩显符无疑也是一个太乙术数历法家。

由于杨惟德与韩显符有师承关系，加之杨惟德所编写的著作及从事的职业基本上与历算相关，且其年代大约在宋代景祐年间，因此，推测《景祐太乙历》的作者应该就是杨惟德。

七、《太乙福应经》与《景祐太乙历》

宋仁宗景祐年间，皇帝组织编撰了三部三式的著作，分别为《太乙福应经》、《遁甲符应经》、《六壬神定经》，它们的主编，都是杨惟德。

其中《太乙福应经》始终未获刊行，李零主编的《中国方术概观》(式法卷)中收录的版本，是根据北京图书馆藏谈剑山居抄本标点的。这部《太乙福应经》共10卷，应该就是《通志艺文》中所称的《景祐太一福应集要》。

据《太乙福应经》卷1之"推太乙积年"记载：

> 演纪上元甲子，距今大宋景祐元年甲戌岁，积得一千空百零一十五万四千九百五十算。……演纪上古上元甲子岁天正十一月经朔日辰前夜半冬至，群数皆同。[15]

其上元与《景祐太乙历》完全相同，由此可见，杨惟德的《太乙福应经》使用的应该就是《景祐太乙历》。在接下来的第二段术文"推太乙四计总法"中，给出了《太乙福应经》所使用的历法的基本常数：

> 实三百八十三万五千四十六分零二十五秒，岁余五万五千零六十八分。
>
> 日法一万零五百分。朔实三十[一]万零七十一分[二](五)十二秒六十五微。朔策二十九日五千五百七十一分二十四秒。气策一十五日二千二百九十四分半。

上述文字，给出了两组回归年与朔望月常数。根据"岁余"与"气策"，可以得到《景祐太乙历》的回归年常数：

$$360+\frac{55\ 068}{10\ 500}=24\times 15\frac{2294.5}{10\ 500}=\frac{3835\ 068}{10\ 500}$$

而根据朔策，则可以得到《景祐太乙历》的朔望月常数：

$$29\frac{5571.24}{10\ 500}=\frac{310\ 071.24}{10\ 500}$$

术文中的"实"与"朔实"，则分别给出了《授时历》的回归年与朔望月常数：

$$\frac{3\ 835\ 046.25}{10\ 500}=365.2425$$

$$\frac{310\ 071.2265}{10\ 500}=29.530\ 593$$

这两个数据，应当是后人加入的。

根据《太乙福应经》的记述，可以确定我们对《景祐太乙历》基本常数的考证了。

本节运用作者重构的有关中国古代天文常数系统理论的假说，根据《太乙金镜式经》及《太乙统宗宝鉴》中残存的《景祐太乙历》的上元积年以及一条基本常数的信息片段，推导出了该历已

经完全遗失了的回归年与朔望月常数。[①] 这里陈述的方法,对于修复那些已知上元积年及其基本常数信息片段的历法,具有普适意义。其中推导基本常数朔望月的方法,甚至可以用于修复一些已经遗失的导出常数,如交点月等。

我们考证并复原的宋代的《景祐太乙历》,是中国历法史上一部从未有人提到的太乙历法。笔者认为,《景祐太乙历》的制定年代大约在景祐元年(1034),其作者可能是杨惟德。《景祐太乙历》之常数系统的精度与其同时期的《崇天历》的常数系统相当,有关历注气朔的推算精度是一样的。因此,太乙历法的系统复杂性与当时行用的官方历法差不多。它是严格按照中国传统数理天文学的方法编制出来的历法。

通过对数部太乙历法及相应的官方历法的对比分析发现,官方历法的历元通常不能满足太乙术数的一些要求,因此,不能取太乙历法而代之。这是在中国历法史的主流之外衍生出一个太乙历法分支的原因。

由于太乙历法对演纪上元的要求比普通历法更多,导致太乙历法推求理想的演纪上元时成功的概率极低,所以,《景祐太乙历》之后,太乙术数虽然随着历史的进步,改进了太乙历法的常数系统,但却始终沿袭着《景祐太乙历》的演纪上元,使得这部已经失传近千年的历法,对太乙术数产生了持久的影响。

太乙术数历法史长期以来未曾引起科学史家的注意。我们的讨论希望证明,太乙历法确实是中国古代数理天文学的一个重要的、不可分割的内容。

参 考 文 献

[1] 李林甫等. 唐六典. 北京:中华书局,1992.412-413

① 本节的"七"是在发现杨惟德的《太乙福应经》之后,补写的。

[2] [宋]秦九韶. 数书九章. 见:中国科学技术典籍通汇(数学卷一). 郑州:河南教育出版社,1994.468~469

[3] 郭书春. 中国科学技术典籍通汇(数学卷一). 郑州:河南教育出版社,1994.429

[4] 何丙郁. 太乙术数与《南齐书·高帝本纪上》史臣曰章. 中央研究院历史语言研究所集刊,第67本,第2分,1996. 383~413

[5] [唐]王希明. 太乙金镜式经. 见: 四库术数类丛书(8). 上海:上海古籍出版社,1992.891

[6] 易纬乾凿度. 见:丛书集成初编(0688). 北京:中华书局,1985.29~34

[7] [唐]瞿昙悉达. 开元占经. 见:四库术数类丛书(5). 上海:上海古籍出版社,1992.943~944

[8] 李鉴澄. 岁差在我国的发现测定和历代冬至日所在的考证. 见: 中国天文学史文集(3). 北京:科学出版社,1984.124~137

[9] 曲安京等. 中国古代数理天文学探析. 西安:西北大学出版社,1994.159~162

[10] 曲安京. 论中国古代历法中之闰周的数学性质. 见: 数学史研究文集(5). 呼和浩特:内蒙古大学出版社;台北:九章出版社,1993.14~25

[11] [元]晓山老人. 太乙统宗宝鉴(卷1). 汉城大学奎章阁藏书. [清]嘉庆二十年(1815)本

[12] [宋]郑樵. 通志. 北京:中华书局,1987.804

[13] [元]脱脱等. 宋史(15). 北京:中华书局,1985.5236,5254

[14] 王宝娟. 宋代的天文机构. 见:中国天文学史文集(6). 北京:科学出版社,1994.322

[15] [宋]杨惟德. 景祐太乙福应经. 见:中国方术概观(式法卷). 北京:人民中国出版社,1993.225~226

索　　引

A

B

C

J

M

N

P

Q

S

Z

(N-0200·0102)

丛书策划：孔国平

责任编辑：孔国平　王剑虹

封面设计：刘向东



ISBN 7-03-014467-8

定价：32.00 元